

**ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 2**

**A.** Για την απλή αρμονική ταλάντωση του σώματος  $\Sigma_1$  εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας σε μια τυχαία θέση:

$$K + U = E_{\tau} \Rightarrow K = E_{\tau} - U \Rightarrow K = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad (1)$$

Όμως:

$$K = 2 - 50x^2 \quad (2)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{1}{2}k = 50 \Rightarrow k = 100 \text{ N/m} \quad \text{και} \quad \frac{1}{2}kA^2 = 0,2 \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

Η κινητική ενέργεια του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από την σχέση:

$$K = E_{\tau} \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{Όμως } \sin(2\theta) = 2\sin^2\theta - 1 \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{\sin(2\theta)+1}{2} \xrightarrow{\theta=\omega t+\varphi_0} \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{\sin(2\omega t+2\varphi_0)+1}{2}$$

$$\text{Οπότε } K = E_{\tau} \left[ \frac{\sin(2\omega t+2\varphi_0)+1}{2} \right] \Rightarrow K = \frac{E_{\tau}}{2} + \frac{E_{\tau}}{2} \sin(2\omega t + 2\varphi_0)$$

Άρα η γωνιακή συχνότητα  $\omega_K$  της κινητικής ενέργειας του σώματος  $\Sigma_1$  είναι ίση με:

$$\omega_K = 2\omega, \text{ όπου } \omega \text{ η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του σώματος } \Sigma_1.$$

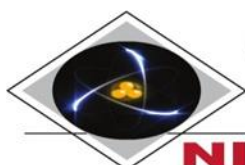
θα ισχύει:

$$\omega_K = 2\omega \Rightarrow \frac{2\pi}{T_K} = 2 \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$$

Για την σταθερά  $k$  του ελατηρίου ισχύει η σχέση :

$$k = m_1 \omega^2 \Rightarrow m_1 = 1 \text{ kg}$$



**B.** Το έργο της δύναμης του ελατηρίου υπολογίζεται από την σχέση :

$$W_{F_{ελ}} = \frac{1}{2}k\Delta l_{\alpha}^2 - \frac{1}{2}k\Delta l_{\tau}^2 \quad (3)$$

Όπου  $\Delta l_{\alpha}$  ,  $\Delta l_{\tau}$  η αρχική και τελική επιμήκυνση η συσπείρωση του ελατηρίου από την θέση του φυσικού μήκους του.

Τη χρονική στιγμή που η απομάκρυνση του σώματος  $\Sigma_1$  από την θέση ισορροπίας του είναι  $\chi_{\alpha} = -0,1 \text{ m}$ , η συσπείρωση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος είναι ίση με  $\Delta l_{\alpha} = 0,1 \text{ m}$ .

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος  $\Sigma_1$  δίνεται από την σχέση:

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -k\chi \Rightarrow \chi_{\tau} = 0,1\sqrt{3} \text{ m}$$

Τη χρονική στιγμή που η απομάκρυνση του σώματος  $\Sigma_1$  από την θέση ισορροπίας του είναι  $\chi_{\tau} = 0,1\sqrt{3} \text{ m}$ , η επιμήκυνση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος είναι ίση με  $\Delta l_{\tau} = 0,1\sqrt{3} \text{ m}$ .

Αντικαθιστώντας στη σχέση (3) , όπου  $k=100\text{N/m}$  ,  $\Delta l_{\alpha} = 0,1 \text{ m}$  και  $\Delta l_{\tau} = 0,1\sqrt{3} \text{ m}$

προκύπτει:

$$W_{F_{ελ}} = -1 \text{ J}$$

**Γ.** Για την απλή αρμονική ταλάντωση του σώματος  $\Sigma_1$  εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας σε μια τυχαία θέση:

$$K + U = E_{\tau} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}k\chi^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow m_1v^2 + k\chi^2 = kA^2 \quad (4)$$

Η επιτάχυνση του σώματος  $\Sigma_1$  σε συνάρτηση με την απομάκρυνση του από την θέση ισορροπίας του δίνεται από την σχέση:

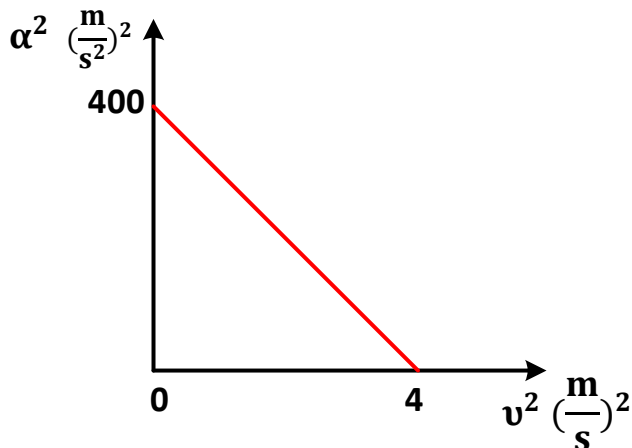
$$\alpha = -\omega^2\chi \Rightarrow \chi = -\frac{\alpha}{\omega^2} \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (5) στην σχέση (4) παίρνουμε:

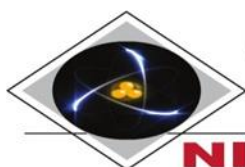
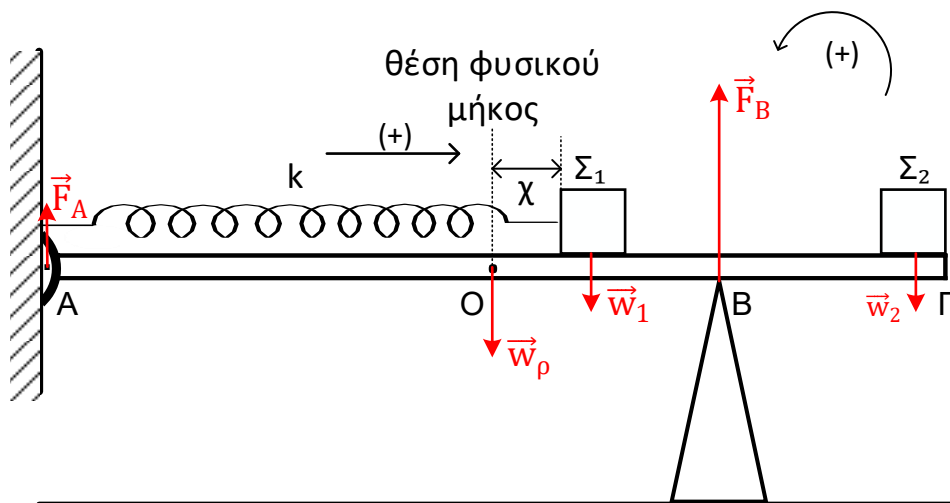
$$m_1 v^2 + k \left( -\frac{\alpha}{\omega^2} \right)^2 = k A^2 \Rightarrow \alpha^2 = \omega^4 A^2 - \omega^2 v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 400 - 100 \cdot v^2 \text{ (S.I.) με } 0 \leq v^2 \leq 4 \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $\alpha^2 = f(v^2)$  φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



**Δ.** Τη χρονική στιγμή που ισχύει  $F_B = 6F_A$ , θεωρούμε ότι το σώμα  $\Sigma_1$  βρίσκεται σε θετική απομάκρυνση  $\chi$  από την θέση ισορροπίας του και κινείται με θετική ταχύτητα. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που δέχεται η ράβδος ΑΓ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Επειδή η ράβδος ΑΓ ισορροπεί η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτή πρέπει να είναι ίση με μηδέν, άρα:

$$F_{ολ,y} = 0 \Rightarrow F_A + F_B = w_\rho + w_1 + w_2$$

Ισχύει  $F_B = 6F_A$ , άρα:

$$F_A + 6F_A = w_\rho + w_1 + w_2 \Rightarrow 7F_A = M_\rho g + m_1 g + m_2 g \Rightarrow F_A = 5N$$

$$\text{και } F_B = 30N$$

Επειδή η ράβδος ΑΓ ισορροπεί η συνισταμένη ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτή πρέπει να είναι ίση με μηδέν ως προς κάθε σημείο, άρα:

$$\Sigma \tau = 0$$

Επιλέγουμε το σημείο Α, οπότε:

$$\Sigma \tau_{A} = 0 \Rightarrow \tau_{FA,A} + \tau_{W_\rho,A} + \tau_{w_1,A} + \tau_{FB,A} + \tau_{w_2,A} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -w_\rho(OA) - w_1(OA+\chi) + F_B(AB) - w_2(AG) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -M_\rho g \frac{L}{2} - m_1 g \left(\frac{L}{2} + \chi\right) + F_B(AB) - m_2 g L = 0 \Rightarrow \chi = 0$$

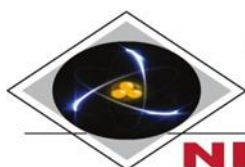
Άρα το σώμα  $\Sigma_1$  διέρχεται από την θέση ισορροπίας του, οπότε το μέτρο της ταχύτητάς του είναι μέγιστο και δίνεται από την σχέση:

$$v_{\max} = A\omega \Rightarrow v_{\max} = 2 \text{ m/s}$$

**Ε.** Το σώμα  $\Sigma_1$  τη χρονική στιγμή που συγκρούεται με το σώμα  $\Sigma_2$  βρίσκεται σε απομάκρυνση  $\chi_1$  από την θέση ισορροπίας του με  $\chi_1 \geq 0$  και έστω ότι κινείται με ταχύτητα  $\vec{v}_1$  που έχει φορά προς την θετική φορά.

Η κρούση μεταξύ των δυο σωμάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  είναι κεντρική και ελαστική. Η ταχύτητα  $\vec{V}_1$  του σώματος  $\Sigma_1$ , αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$V_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$



Θεωρούμε ως θετική φορά την φορά προς τα δεξιά, άρα αντικαθιστώντας όπου  $m_1 = m_2$ ,  $v_2 = -2\sqrt{3} \text{ m/s}$ , προκύπτει:

$$V_1 = -2\sqrt{3} \text{ m/s}$$

Για την απλή αρμονική ταλάντωση του σώματος  $\Sigma_1$  εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας, την χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση του με το σώμα  $\Sigma_2$ :

$$K + U = E_{\tau} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} k \chi_1^2 = \frac{1}{2} k A_1^2 \Rightarrow m_1 V_1^2 + k \chi_1^2 = k A_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 + 100 \chi_1^2 = 100 A_1^2 \quad (6)$$

Από τη σχέση (6) παρατηρούμε ότι το πλάτος  $A_1$  της ταλάντωσης του σώματος  $\Sigma_1$  γίνεται μέγιστο όταν η απομάκρυνση  $\chi_1$  είναι μέγιστη, άρα  $\chi_1 = A \Rightarrow \chi_1 = 0,2 \text{ m}$

**ΣΤ.** Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος  $\Sigma_1$  από την θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από την σχέση :

$$\chi = A_1 \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \quad (7)$$

Αντικαθιστούμε στην σχέση (6) όπου  $\chi_1 = 0,2 \text{ m}$ , οπότε προκύπτει:

$$A_1 = 0,4 \text{ m}$$

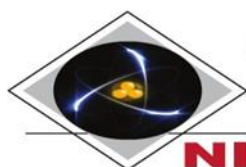
Την χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  το σώμα  $\Sigma_1$  βρίσκεται σε απομάκρυνση  $\chi_1 = 0,2 \text{ m}$ . Αντικαθιστώντας στη σχέση (7) όπου  $t = 0$  και  $\chi = 0,2$  παίρνουμε:

$$0,2 = 0,4 \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = \eta \mu \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z} \text{ ή } \varphi_0 = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z})$$

Επειδή  $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$ , προκύπτει:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad ή } \varphi_0 = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$



Η εξίσωση της ταχύτητας του σώματος  $\Sigma_1$  σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από την σχέση :

$$V = A_1 \omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Την χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  το σώμα  $\Sigma_1$  κινείται με ταχύτητα  $V_1 < 0 \Rightarrow A_1 \omega \sin \varphi_0 < 0$

Αντικαθιστώντας όπου  $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$  παίρνουμε  $A_1 \omega \sin \frac{5\pi}{6} < 0$

$$\text{Άρα } \varphi_0 = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (7) όπου  $A_1 = 0,4 \text{ m}$ ,  $\omega = 10 \text{ rad/s}^2$  και  $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$  προκύπτει:

$$x = 0,4 \text{ m} \left( 10t + \frac{5\pi}{6} \right) \text{ (S.I.)}$$

Τη χρονική στιγμή  $t_1 = \frac{\pi}{30} \text{ s}$  ή απομάκρυνση του σώματος  $\Sigma_1$  από την θέση ισορροπίας του θα είναι ίση με:

$$x = 0,4 \text{ m} \left( 10 \frac{\pi}{30} + \frac{5\pi}{6} \right) \text{ ή } x = -0,2 \text{ m}$$

Η ταχύτητα  $\vec{v}_1$  του σώματος  $\Sigma_1$  λίγο πριν την κρούση με το σώμα  $\Sigma_2$  είναι ίση με  $v_1 = 0$

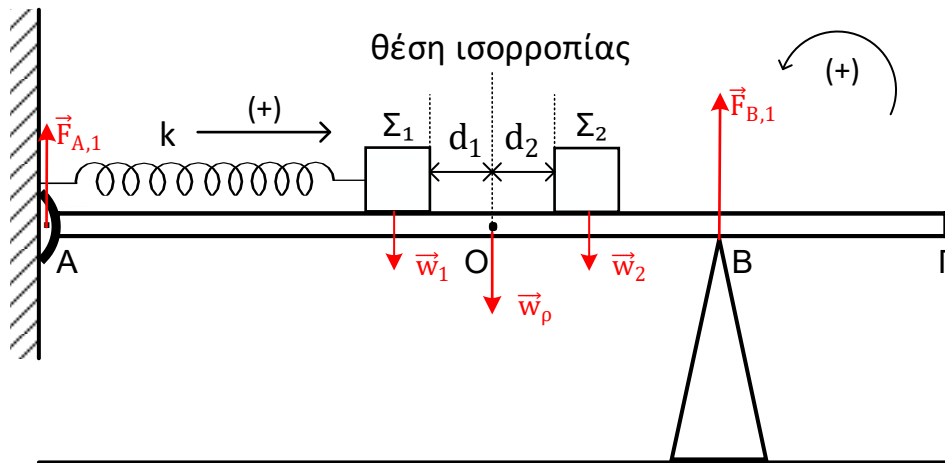
Η ταχύτητα  $\vec{V}_2$  του σώματος  $\Sigma_2$ , αμέσως μετά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$V_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Αντικαθιστώντας όπου  $v_1 = 0$  και  $m_1 = m_2$  προκύπτει:

$$V_2 = 0$$

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που δέχεται η ράβδος ΑΓ, τη χρονική στιγμή  $t_1 = \frac{\pi}{30} \text{ s}$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Τη χρονική στιγμή  $t_1 = \frac{\pi}{30} \text{ s}$ , το σώμα  $\Sigma_1$  απέχει από την θέση ισορροπίας του απόσταση ίση με  $d_1 = 0,2 \text{ m}$  και το σώμα  $\Sigma_2$  απόσταση ίση με  $d_2 = 0,2 \text{ m}$ .

Επειδή η ράβδος ΑΓ ισορροπεί η συνισταμένη ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτή πρέπει να είναι ίση με μηδέν ως προς κάθε σημείο, άρα:

$$\Sigma \tau = 0$$

Επιλέγουμε το σημείο Α, οπότε:

$$\Sigma \tau_{A,1} = 0 \Rightarrow \tau_{F_{A,1},A} + \tau_{w_{\rho},A} + \tau_{w_1,A} + \tau_{F_{B,1},A} + \tau_{w_2,A} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -w_{\rho}(OA) - w_1(OA - d_1) + F_{B,1}(AB) - w_2(OA + d_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -M_{\rho}g \frac{L}{2} - m_1g \left( \frac{L}{2} - d_1 \right) + F_{B,1}(AB) - m_2g(OA + d_2) = 0 \Rightarrow F_{B,1} = \frac{70}{3} \text{ N}$$

Επειδή η ράβδος ΑΓ ισορροπεί η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτή πρέπει να είναι ίση με μηδέν, άρα:

$$F_{\text{ολ},y} = 0 \Rightarrow F_{A,1} + F_{B,1} = w_{\rho} + w_1 + w_2 \Rightarrow F_{A,1} + F_{B,1} = M_{\rho}g + m_1g + m_2g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{A,1} = \frac{35}{3} \text{ N}$$

