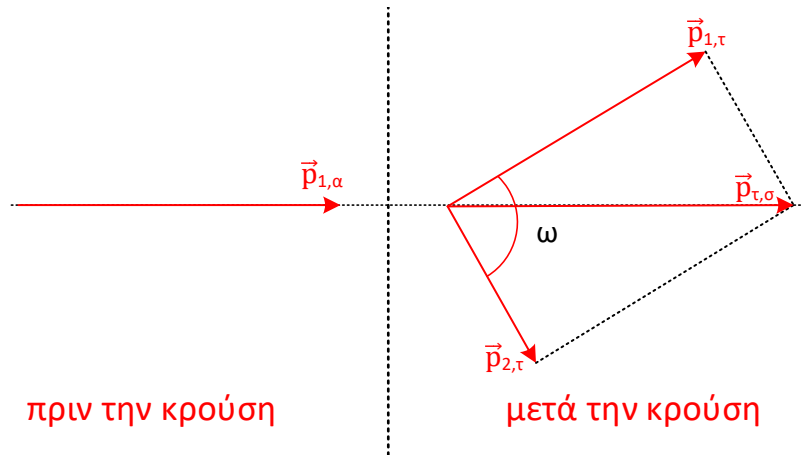


ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 1

A. Έστω ω η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα των ορμών $\vec{p}_{1,\tau}$ και $\vec{p}_{2,\tau}$ των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 μετά την κρούση, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σφαιρών Σ_1 και Σ_2 :

$$\vec{p}_{\alpha,\sigma} = \vec{p}_{\tau,\sigma} \Rightarrow \vec{p}_{1,\alpha} + \vec{p}_{2,\alpha} = \vec{p}_{1,\tau} + \vec{p}_{2,\tau}$$

Η σφαίρα Σ_2 είναι αρχικά ακίνητη. Άρα $\vec{p}_{2,\alpha} = \vec{0}$, οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται :

$$\vec{p}_{1,\alpha} = \vec{p}_{1,\tau} + \vec{p}_{2,\tau} \Rightarrow p_{1,\alpha} = \sqrt{p_{1,\tau}^2 + p_{2,\tau}^2 + 2p_{1,\tau}p_{2,\tau}\cos\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1^2 u_0^2 = m_1^2 u_1^2 + m_2^2 u_2^2 + 2m_1 u_1 m_2 u_2 \cos\omega \Rightarrow u_0^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_1 u_2 \cos\omega \quad (1)$$

Η κρούση είναι ελαστική, άρα θα ισχύει η αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας του συστήματος:

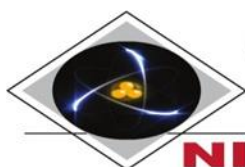
$$K_{\alpha,\sigma} = K_{\tau,\sigma} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 u_0^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \Rightarrow u_0^2 = u_1^2 + u_2^2 \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2) στη σχέση (1) παίρνουμε:

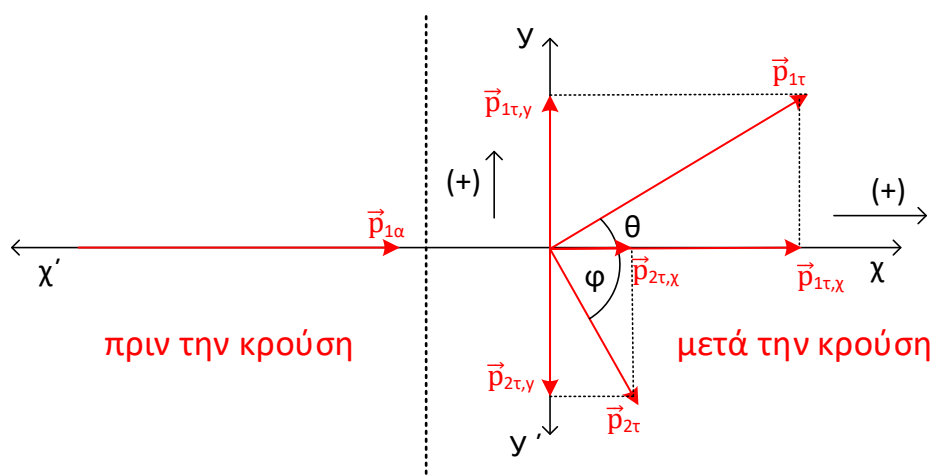
$$u_1^2 + u_2^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_1 u_2 \cos\omega \Rightarrow 2u_1 u_2 \cos\omega = 0 \Rightarrow \cos\omega = 0 \Rightarrow \omega = 90^\circ$$

Ισχύει:

$$\theta + \varphi = \omega \Rightarrow \theta + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow \theta = 30^\circ$$



B.



Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σφαιρών Σ_1 και Σ_2 στον άξονα $y'y'$:

$$\vec{p}_{\alpha,y} = \vec{p}_{\tau,y} \Rightarrow \vec{p}_{1\alpha,y} = \vec{p}_{1\tau,y} + \vec{p}_{2\tau,y} \Rightarrow 0 = m_1 v_1 \eta \mu \theta - m_2 v_2 \eta \mu \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = v_1 \frac{1}{2} - v_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v_1 = v_2 \sqrt{3}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) παίρνουμε:

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 \Rightarrow v_0^2 = (v_2 \sqrt{3})^2 + v_2^2 \Rightarrow v_2 = 2\sqrt{3} \text{ m/s}$$

Η σχέση $v_1 = v_2 \sqrt{3}$ με αντικατάσταση δίνει:

$$v_1 = 6 \text{ m/s}$$

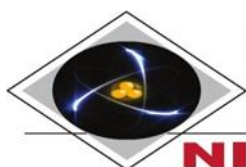
Γ. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σφαιρών Σ_1 και Σ_2 :

$$\vec{p}_{\alpha,\sigma} = \vec{p}_{\tau,\sigma} \Rightarrow \vec{p}_{1,\alpha} + \vec{p}_{2,\alpha} = \vec{p}_{1,\tau} + \vec{p}_{2,\tau} \Rightarrow \vec{p}_{1,\alpha} - \vec{p}_{1,\tau} = \vec{p}_{2,\tau} - \vec{p}_{2,\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{2,\tau} - \vec{p}_{2,\alpha} \Rightarrow \Delta \vec{p}_1 = -\vec{p}_{2,\tau}$$

Άρα το μέτρο μεταβολής της ορμής της σφαίρας Σ_1 κατά την κρούση θα είναι:

$$\Delta p_1 = p_{2,\tau} \Rightarrow \Delta p_1 = m_2 v_2 \Rightarrow \Delta p_1 = 2\sqrt{3} \text{ kgm/s}$$

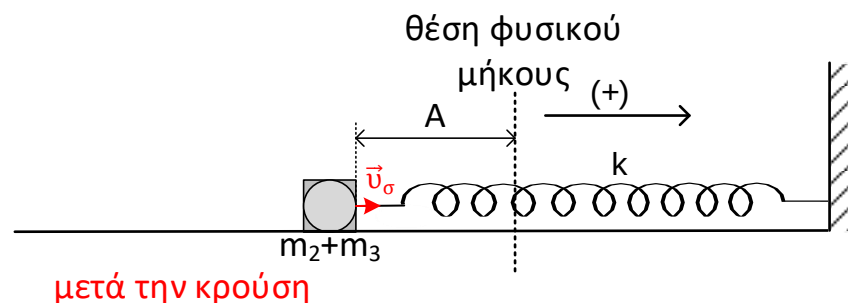
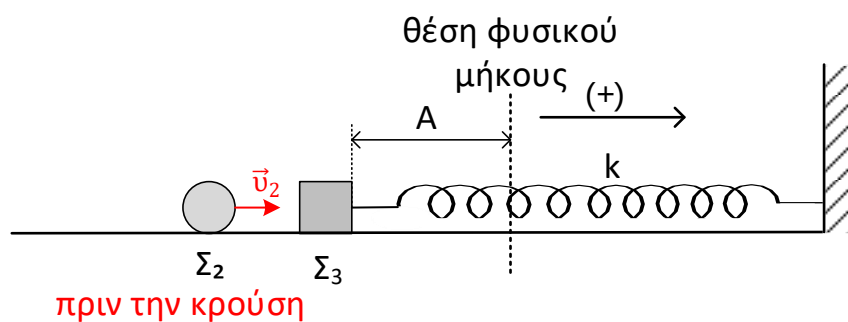


Το διάνυσμα της μεταβολής της ορμής της σφαίρας Σ_1 έχει αντίθετη κατεύθυνση από το διάνυσμα της ορμής της σφαίρας Σ_2 μετά την κρούση και σχηματίζει με τον άξονα $\chi\chi$ γωνία 120° .

Δ. το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μεταφέρθηκε από τη σφαίρα Σ_1 στη σφαίρα Σ_2 κατά την κρούση υπολογίζεται από την σχέση:

$$\Pi\% = \frac{\Delta K_2}{K_{1\alpha}} 100\% \Rightarrow \Pi\% = \frac{K_{2,\tau} - K_{2,\alpha}}{K_{1,\alpha}} 100\% \Rightarrow \Pi\% = \frac{\frac{1}{2}m_2 v_2^2}{\frac{1}{2}m_1 v_0^2} 100\% \Rightarrow \Pi\% = 25\%$$

Ε.

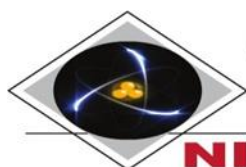


Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σφαιρών Σ_2 και Σ_3 , θεωρώντας ως θετική φορά την φορά προς τα δεξιά:

$$\vec{p}_{\alpha,\sigma} = \vec{p}_{\tau,\sigma} \Rightarrow m_2 v_2 = (m_2 + m_3) v_\sigma \Rightarrow v_\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s}$$

Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια κατά την κρούση υπολογίζεται από την σχέση :

$$\Pi\% = \frac{E_{\alpha\pi}}{K_{\alpha,\sigma}} 100\% \Rightarrow \Pi\% = \frac{K_{\alpha,\sigma} - K_{\tau,\sigma}}{K_{\alpha,\sigma}} 100\% \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \Pi\% = \frac{\frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \left[\frac{1}{2}(m_2 + m_3) v_\sigma^2 \right]}{\frac{1}{2}m_2 v_2^2} 100\% \Rightarrow \Pi\% = 75\%$$

Ζ. Το συσσωμάτωμα, που προκύπτει από την κρούση, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος από την θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από την σχέση :

$$\chi = A_\sigma \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (3)$$

$$K = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow \omega = 5 \text{ rad/s}$$

Για την απλή αρμονική ταλάντωση του συσσωματώματος εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αμέσως μετά την κρούση:

$$K + U = E_\tau \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_\sigma^2 + \frac{1}{2}k\chi^2 = \frac{1}{2}kA_\sigma^2 \Rightarrow A_\sigma = 0,2\text{m}$$

Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το συσσωμάτωμα βρίσκεται σε απομάκρυνση $\chi = -0,1\text{m}$ από την θέση ισορροπίας του. Αντικαθιστώντας στην σχέση (3) όπου $t_0 = 0$ και $\chi = -0,1\text{m}$, παίρνουμε:

$$-0,1 = 0,2\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -\eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{7\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z} \text{ ή } \varphi_0 = 2\kappa\pi + \pi - \frac{7\pi}{6} \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z})$$

Επειδή $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, παίρνουμε:

$$\varphi_0 = \frac{7\pi}{6} \text{ rad ή } \varphi_0 = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$

Η εξίσωση της ταχύτητας του συσσωματώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από την σχέση :

$$v_\sigma = A_\sigma \omega \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \quad (4)$$

Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το συσσωμάτωμα κινείται με ταχύτητα $v_\sigma > 0 \Rightarrow A_\sigma \omega \sigma\upsilon\nu\varphi_0 > 0 \quad (5)$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (5) όπου $\varphi_0 = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$, παίρνουμε $A_\sigma \omega \sigma\upsilon\nu\frac{11\pi}{6} > 0$

$$\text{Άρα } \varphi_0 = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (3) και (4) όπου: $\omega = 5 \text{ rad/s}$, $A_\sigma = 0,2\text{m}$ και

$$\varphi_0 = \frac{11\pi}{6} \text{ rad, προκύπτει :}$$

$$\chi = 0,2\eta\mu(5t + \frac{11\pi}{6}) \text{ (S.I.)}$$

$$v_\sigma = 1\sigma\upsilon\nu(5t + \frac{11\pi}{6}) \text{ (S.I.)}$$

Από το θεώρημα έργου ενέργειας παίρνουμε:

$$K_\alpha + W_{\Sigma F} = K_\tau \Rightarrow \Delta K = W_{\Sigma F} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{d(\Sigma F \cdot x)}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -k \cdot \chi \cdot v_\sigma$$

Άρα το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος δίνεται από την σχέση:

$$\frac{dK}{dt} = k \cdot \chi \cdot v_\sigma \text{ (6)}$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{10} \text{ s}$, η απομάκρυνση του συσσωματώματος από την θέση ισορροπίας του είναι ίση με $\chi = 0,1\sqrt{3}\text{m}$ και η ταχύτητά του είναι ίση με $v_\sigma = 0,5 \text{ m/s}$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (6) όπου $\chi = 0,1\sqrt{3}\text{m}$ και $v_\sigma = 0,5 \text{ m/s}$ προκύπτει:

$$\frac{dK}{dt} = 5\sqrt{3} \text{ J/s}$$

