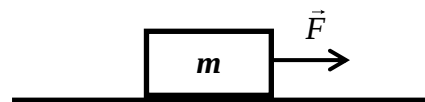


ΘΕΜΑ Α

Μικρό σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,5$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, στο σώμα αρχίζει να ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 30 \text{ N}$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 3 \text{ s}$, οπότε παύει να ασκείται η δύναμη $\vec{F}$.



Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m / s}^2$.

Να υπολογίσετε:

Δ1) το μέτρο της τριβής ολίσθησης,

Μονάδες 6

Δ2) το έργο της δύναμης $\vec{F}$ στη χρονική διάρκεια που ασκείται στο σώμα,

Μονάδες 6

Δ3) ποια χρονική στιγμή το σώμα θα σταματήσει να κινείται,

Μονάδες 6

Δ4) τη μετατόπιση του σώματος από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι να σταματήσει να κινείται.

Μονάδες 7

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Η τριβή ολίσθησης υπολογίζεται από τη μαθηματική σχέση:

$$T = \mu m g \quad \text{ή} \quad T = 10 \text{ N}$$

Δ2) Το έργο της δύναμης F υπολογίζεται από τον τύπο:

$$W_F = F \Delta x_1 \quad (1)$$

Θα πρέπει να υπολογίσουμε τη μετατόπιση του σώματος για το χρόνο που ασκείται η δύναμη F .

Από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα

$$\Sigma F = F - T = ma$$

προκύπτει ότι το σώμα θα κινηθεί προς την κατεύθυνση της F με επιτάχυνση $a_1 = 10 \text{ m/s}^2$.

Συνεπώς η μετατόπιση του σώματος θα είναι:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a t^2 = 45 \text{ m}$$

Άρα από την (1) προκύπτει ότι το έργο της F θα είναι

$$W_F = 1350 \text{ J.}$$

Δ3) Όταν παύει να ασκείται η δύναμη F ($t_1 = 3 \text{ s}$, $v_o = a_1 t_1 = 30 \text{ m/s}$) το σώμα εκτελεί μια ευθύγραμμη επιβραδυνόμενη κίνηση, υπό την επίδραση της τριβής ολίσθησης. Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα μας δίνει τη νέα επιτάχυνση $a_2 = 5 \text{ m/s}^2$, που έχει αντίθετη φορά από την ταχύτητα του σώματος.

$$v = v_o - a_2 \Delta t$$

Το σώμα θα κινηθεί για $\Delta t = 6 \text{ s}$ μέχρι να σταματήσει. Συνολικός χρόνος κίνησης 9 s .

Δ4) Η μετατόπιση του σώματος για το διάστημα που το σώμα κάνει επιβραδυνόμενη κίνηση θα είναι:

$$\Delta x_2 = v_o \cdot \Delta t - \frac{1}{2} a_2 \cdot \Delta t^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x_2 = 90 \text{ m.}$$

Άρα η συνολική μετατόπιση του σώματος είναι:

$$\Delta x_{ολ} = \Delta x_1 + \Delta x_2 \quad \text{ή} \quad \Delta x_{ολ} = 135 \text{ m.}$$

ΘΕΜΑ Α

Σε ένα κιβώτιο μάζας 1 kg που κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο δρόμο, ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το κιβώτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου 10 m/s . Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του κιβωτίου και του δρόμου είναι $\mu = 0,2$.



Τη χρονική στιγμή $t = 0\text{ s}$ ένας μαθητής ξεκινά να παρατηρεί την κίνηση του κιβωτίου. Να υπολογίσετε:

Α1) το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$

Μονάδες 6

Α2) το έργο της δύναμης $\vec{F}$, από τη χρονική στιγμή $t = 0$, μέχρι τη στιγμή που το χρονόμετρο του μαθητή δείχνει $t_1 = 5\text{ s}$.

Μονάδες 6

Τη χρονική στιγμή t_1 , καταργείται η δύναμη $\vec{F}$. Να υπολογίσετε :

Α3) τη συνολική μετατόπιση του κιβωτίου από τη χρονική στιγμή $t = 0$, μέχρι τη στιγμή που σταμάτησε να κινείται.

Μονάδες 7

Α4) το έργο της τριβής, από την χρονική στιγμή t_1 μέχρι τη χρονική στιγμή που το κιβώτιο σταμάτησε να κινείται.

Μονάδες 6

Θεωρήστε την επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με $g = 10\text{ m/s}^2$ και ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα..

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το κιβώτιο Α εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και από τον 1ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε :

$$\Sigma F = 0.$$

Άρα η δύναμη F είναι ίση κατά μέτρο με την τριβή ολίσθησης που εμφανίζεται μεταξύ κιβωτίου και δρόμου.

$$T = \mu m g.$$

$$\text{Οπότε και } F = 2N$$

Δ2) Το κιβώτιο για το χρονικό διάστημα από $t = 0$ s μέχρι $t_1 = 5$ s κινείται με σταθερή ταχύτητα, οπότε μετατοπίζεται κατά $\Delta x_1 = 50$ m. Άρα το έργο της δύναμης F υπολογίζεται από τον τύπο:

$$W_F = F \Delta x_1$$

και υπολογίζεται

$$W_F = 100 \text{ J.}$$

Δ3) Όταν παύσει να ασκείται η δύναμη F , το κιβώτιο θα κινηθεί ευθύγραμμα υπό την επίδραση της τριβής ολίσθησης, μέχρι να ακινητοποιηθεί.

Με βάση το 2^ο νόμο του Νεύτωνα $\Sigma F = ma$, η επιβράδυνση που θα έχει το σώμα τότε θα είναι

$$a = 2 \text{ m/s}^2.$$

Η εξίσωση της ταχύτητας για την επιβραδυνόμενη αυτή κίνηση θα είναι:

$$v = v_0 - at.$$

και τελικά ο χρόνος κίνησης για το διάστημα από t_1 μέχρι να ακινητοποιηθεί υπολογίζεται σε 5s.

Άρα κάνει δύο κινήσεις:

1^η ΚΙΝΗΣΗ: αρχικά Ε.Ο.Κ. για 5s (όπου μετατοπίζεται κατά 50 m) και

2^η ΚΙΝΗΣΗ: στη συνέχεια επιβραδυνόμενη κίνηση για άλλα 5s.

Η μετατόπιση σε αυτό το χρόνο προκύπτει:

$$\Delta x_2 = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = 25 \text{ m.}$$

Άρα η συνολική μετατόπιση για όσο κινείται το κιβώτιο είναι: 75 m.

Δ4) Το έργο της τριβής

$$W_T = -T \Delta x_2$$

για αυτά τα 25 μέτρα μέχρι να σταματήσει να κινείται θα είναι: $W_T = -50\text{J}$.

ΘΕΜΑ Α

Δύο κιβώτια Α και Β με μάζες $m_A = 5 \text{ kg}$ και $m_B = 10 \text{ kg}$, κινούνται ευθύγραμμα κατά μήκος ενός οριζόντιου προσανατολισμένου άξονα Οχ. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ τα κιβώτια διέρχονται από τη θέση $x_0 = 0 \text{ m}$ του άξονα, κινούμενα και τα δύο προς τη θετική φορά. Το κιβώτιο Α κινείται με σταθερή ταχύτητα $v_A = 10 \text{ m/s}$, ενώ το κιβώτιο Β έχει αρχική ταχύτητα $v_0 = 30 \text{ m/s}$, και κινείται με σταθερή επιτάχυνση η οποία έχει μέτρο $a_B = 2 \text{ m/s}^2$ και φορά αντίθετη της ταχύτητας $\vec{v}_0$.

Να υπολογίσετε:

Δ1) το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που ασκείται σε κάθε κιβώτιο.

Μονάδες 5

Δ2) τη χρονική στιγμή κατά την οποία τα κιβώτια Α και Β θα βρεθούν πάλι το ένα δίπλα στο άλλο μετά τη χρονική στιγμή t_0 .

Μονάδες 6

Δ3) τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες τα μέτρα των ταχυτήτων των δυο κιβωτίων θα είναι ίσα.

Μονάδες 8

Δ4) τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας κάθε κιβωτίου από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, μέχρι τη χρονική στιγμή κατά την οποία τα μέτρα των ταχυτήτων τους θα είναι ίσα για πρώτη φορά.

Μονάδες 6

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το κιβώτιο Α εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Από τον 1ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F_A = 0.$$

Το δεύτερο κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα το μέτρο της συνισταμένης δύναμης είναι

$$\Sigma F_B = ma_B \quad \text{ή} \quad \Sigma F_B = 20 \text{ N}$$

με φορά της ΣF_B αντίθετη της αρχικής ταχύτητας v_0 .

Δ2) Συνθήκη συνάντησης : $x_A = x_B$ (1)

$$x_A = v_A t \quad (2) \quad \text{και}$$

$$x_B = v_0 t - \frac{1}{2} \alpha_B t^2 \quad (3)$$

Από την (1), (2) και (3) λαμβάνουμε

$$v_A t = v_0 t - \frac{1}{2} \alpha_B t^2$$

και επιλύοντας την εξίσωση ως προς t τελικά λαμβάνουμε:

$$t = 20 \text{ s}.$$

Δ3) Η φορά κίνησης του κιβωτίου Α διατηρείται σταθερή.

Η φορά κίνησης του κιβωτίου Β αντιστρέφεται την χρονική στιγμή t_{stop} που η ταχύτητα του μηδενίζεται. Από την εξίσωση ταχύτητας για το Β:

$$v_B = v_0 - \alpha t$$

προκύπτει ότι

$$t_{stop} = 15 \text{ s}.$$

Συνεπώς τα μέτρα των ταχυτήτων του Α και του Β γίνονται ίσα δυο χρονικές στιγμές όταν:

A) $\vec{v}_A$ και $\vec{v}_B$ έχουν ίδια φορά δηλ. $v_A = v_B \Rightarrow v_A = v_0 - \alpha_B t_1$ ή $t_1 = 10 \text{ s}$

B) $\vec{v}_A$ και $\vec{v}_B$ έχουν αντίθετη φορά δηλ. $-v_A = v_B \Rightarrow -v_A = v_0 - \alpha t_2$ ή $t_2 = 20 \text{ s}$

Δ4) Η ταχύτητα του κιβωτίου Α είναι σταθερή οπότε και η κινητική του ενέργεια είναι σταθερή, άρα

$$\Delta K_A = 0 \text{ J}$$

Για το κιβώτιο Β έχουμε

$$\Delta K_B = K_{τελικη} - K_{αρχικη} \quad \text{ή} \quad \Delta K_B = \frac{1}{2} m_B v_A^2 - \frac{1}{2} m_B v_0^2$$

και τελικά

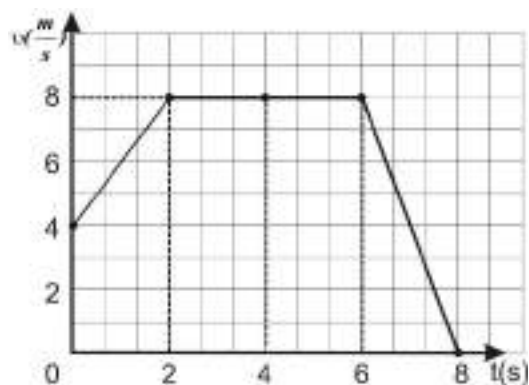
$$\Delta K_B = -4000 \text{ J}$$

ΘΕΜΑ Δ

Μικρό σώμα μάζας 10 kg κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος του προσανατολισμένου άξονα Ox και η τιμή της ταχύτητάς του μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

Θεωρείστε ότι τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$.

Δ1) Να χαρακτηρίσετε το είδος της κίνησης του σώματος στα χρονικά διαστήματα $0 \rightarrow 2$ s, $2 \rightarrow 6$ s και $6 \rightarrow 8$ s



Μονάδες 6

Δ2) Να υπολογίσετε το μέτρο της συνισταμένης των δυνάμεων τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,5$ s.

Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του σώματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 6,5$ s.

Μονάδες 7

Δ4) Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του σώματος στο χρονικό διάστημα από $0 \rightarrow 8$ s.

Μονάδες 6

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 2$ s:

η ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t = 0$ s έχει τιμή 4 m/s και στη συνέχεια αυξάνει, καθώς εκτελεί μια ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Χρονικό διάστημα $2 \rightarrow 6$ s :

η ταχύτητα παραμένει σταθερή σε μια ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Και το χρονικό διάστημα $6 \rightarrow 8$ s:

το σώμα εκτελεί μια ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Δ2) Κατά τη διάρκεια των πρώτων 2 s της κίνησης η επιτάχυνση είναι σταθερή και η ταχύτητα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v = v_0 + a t \quad (1)$$

Με βάση το διάγραμμα και τη σχέση (1) προκύπτει ότι $a = 2 \text{ m/s}^2$.

Σύμφωνα με τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα: $\Sigma F = 20 \text{ N}$.

Δ3) Μετά το 6^ο s το σώμα κινείται με ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση οπότε η επιβράδυνση του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v = v_6 - a' \Delta t$$

Για το χρονικό διάστημα $6 \rightarrow 8$ s προκύπτει ότι:

$$a' = 4 \text{ m/s}^2$$

και είναι αντίθετης κατεύθυνσης από την ταχύτητα.

Άρα η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 6,5 \text{ s}$ θα είναι 6 m/s

$$\text{Άρα η } K_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = 180 \text{ J}$$

Δ4) Η μέση ταχύτητα μιας μεταβαλλόμενης κίνησης προκύπτει από το πηλίκο της συνολικής μετατόπισης του σώματος, προς το χρονικό διάστημα που κινήθηκε.

Το χρονικό διάστημα (σύμφωνα με το διάγραμμα) είναι 8 s.

Και η συνολική μετατόπιση προκύπτει από το εμβαδό που περικλείει η γραφική παράσταση της μεταβαλλόμενης κίνησης.

Το εμβαδό αυτό μπορεί να υπολογιστεί για τρία επιμέρους σχήματα στα χρονικά διαστήματα $0 \rightarrow 2$ s, $2 \rightarrow 6$ s και $6 \rightarrow 8$ s.

$$\text{Άρα } v_{\mu} = \frac{(\text{Εμβαδό τραπεζίου}) + (\text{Εμβαδό παραλληλογράμου}) + (\text{Εμβαδό Τριγώνου})}{8 \text{ s}}$$

$$v_{\mu} = 6,5 \text{ m/s}$$

ΘΕΜΑ Δ

Μικρό σώμα μάζας $m = 200 \text{ g}$ κινείται σε οριζόντιο δρόμο, με τον οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,2$. Τη χρονική στιγμή που θεωρούμε ως $t = 0 \text{ s}$ το σώμα κινείται με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 72 \text{ km/h}$. Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα. Να υπολογίσετε:

Δ1) το μέτρο της τριβής ολίσθησης,

Μονάδες 6

Δ2) τη χρονική στιγμή που θα σταματήσει το σώμα να κινείται.

Μονάδες 6

Δ3) την μετατόπιση του σώματος, από τη χρονική στιγμή $t = 0$, μέχρι να σταματήσει.

Μονάδες 6

Δ4) το έργο της τριβής ολίσθησης, από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι να σταματήσει το σώμα να κινείται.

Μονάδες 7

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Η τριβή ολίσθησης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$T = \mu m g \quad \text{ή} \quad T = 0,4 \text{ N}$$

Δ2) Σύμφωνα με το 2^ο νόμο του Νεύτωνα η επιτάχυνση με την οποία κινείται το σώμα είναι

$$a = 2 \text{ m / s}^2$$

με φορά αντίθετη προς τη φορά της κίνησης.

Συνεπώς ο χρόνος μέχρι να σταματήσει θα υπολογιστεί από την πιο κάτω σχέση, αφού πρώτα μετατρέψουμε την ταχύτητα σε m / s:

$$v = v_0 - a t \Rightarrow t = 10 \text{ s}$$

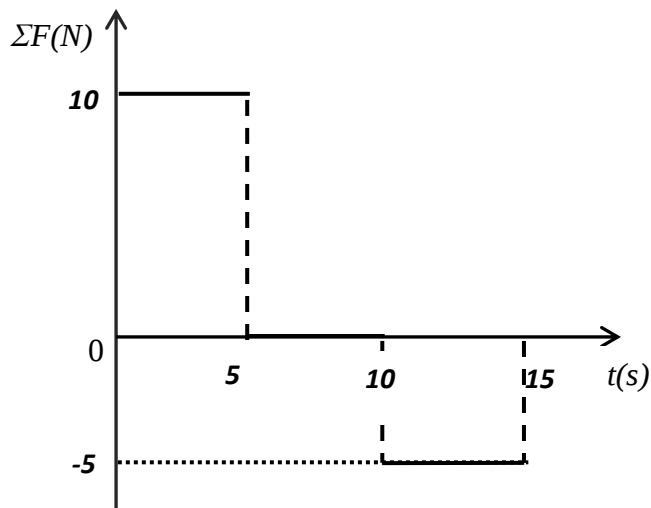
Δ3) Το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, οπότε η μετατόπιση του σώματος θα είναι:

$$\Delta x = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x = 100 \text{ m}$$

Δ4) Το έργο της τριβής για αυτά τα 100 μέτρα μέχρι να σταματήσει να κινείται θα είναι:

$$W_T = -T \Delta x \quad \text{ή} \quad W_T = -40 \text{ J}$$

ΘΕΜΑ Δ



Ένα σώμα μάζας 1 kg βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, στο σώμα αρχίζουν να ασκούνται δυνάμεις. Η συνισταμένη αυτών των δυνάμεων έχει οριζόντια διεύθυνση και η τιμή της μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο, όπως φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα.

Δ1) Να χαρακτηρίσετε τα είδη των κινήσεων που εκτελεί το σώμα, στα χρονικά διαστήματα $0 \rightarrow 5$ s, $5 \rightarrow 10$ s και $10 \rightarrow 15$ s.

Μονάδες 5

Δ2) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s

Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογίσετε το διάστημα που έχει διανύσει το σώμα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 10$ s.

Μονάδες 7

Δ4) Να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης δύναμης από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_3 = 15$ s.

Μονάδες 7

Ενδεικτική Λύση

Δ1) α) χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 5 \text{ s}$,

Σταθερή δύναμη άρα και σταθερή επιτάχυνση, οπότε έχουμε μια ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση.
Επιτάχυνση με θετική τιμή, άρα ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

β) χρονικό διάστημα $5 \rightarrow 10 \text{ s}$,

Μηδενική δύναμη, άρα μηδενική επιτάχυνση, άρα σταθερή ταχύτητα.

Το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

γ) χρονικό διάστημα $10 \rightarrow 15 \text{ s}$,

Παρόμοια με το (α) αλλά με αρνητική επιτάχυνση, άρα ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Δ2) Με βάση το 2^ο νόμο του Νεύτωνα

$$\Sigma F = ma$$

η επιτάχυνση του σώματος για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 5 \text{ s}$ είναι

$$a_1 = 10 \text{ m/s}^2.$$

Άρα η ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$ θα είναι

$$v = a_1 \cdot t_1 \quad \text{ή} \quad v = 50 \text{ m/s}$$

Δ3) Το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 10 \text{ s}$ το σώμα κάνει δύο κινήσεις, άρα το συνολικό διάστημα που θα διανύσει θα είναι το άθροισμα των μετατοπίσεων κατά τη διάρκεια των δύο κινήσεων.

$$x = \frac{1}{2} a t_1^2 + v t_2 \quad \text{ή} \quad x = 375 \text{ m}$$

Δ4) Το έργο της συνισταμένης δύναμης θα είναι θετικό για χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 5 \text{ s}$,

μηδενικό για το χρονικό διάστημα $5 \rightarrow 10 \text{ s}$ και αρνητικό για το χρονικό διάστημα $10 \rightarrow 15 \text{ s}$.

Τα επιμέρους έργα θα υπολογιστούν από τη σχέση

$$W_{\Sigma F} = \Sigma F \Delta x$$

για κάθε μετατόπιση.

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x_1 = 125 \text{ m}$$

$$\Delta x_3 = v \Delta t_3 - \frac{1}{2} a' \Delta t_3^2 \quad \text{με} \quad a' = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{Οπότε:} \quad \boxed{\Delta x_3 = 187,5 \text{ m}}$$

$$W_{\text{ολ}} = W_1 + W_3 \quad \text{ή} \quad \boxed{W_{\text{ολ}} = 312,5 \text{ J}}$$

ΘΕΜΑ Α

Από ένα βράχο ύψους $H = 10 \text{ m}$ πάνω την επιφάνεια της θάλασσας εκτοξεύουμε μια πέτρα μάζας $0,1 \text{ kg}$, κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_A = 10 \text{ m/s}$.

Να υπολογίσετε:

Δ1) τη μηχανική ενέργεια της πέτρας τη στιγμή της εκτόξευσης,

Μονάδες 5

Δ2) το μέγιστο ύψος που θα φτάσει η πέτρα από την επιφάνεια της θάλασσας καθώς και την τιμή της δυναμικής ενέργειας σε αυτό το ύψος,

Μονάδες 7

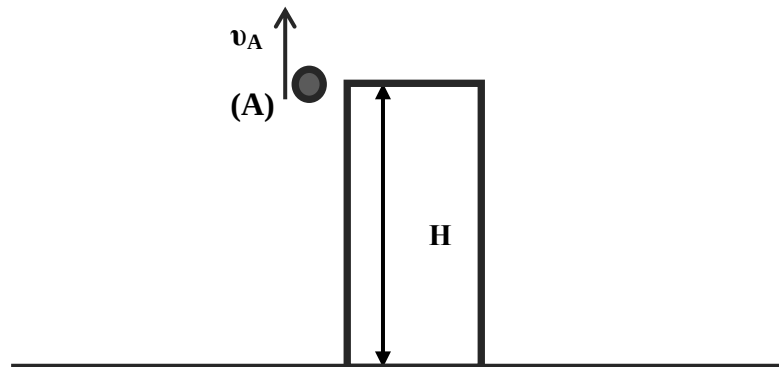
Δ3) σε πόσο ύψος πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας, η κινητική ενέργεια της πέτρας είναι ίση με τη δυναμική ενέργεια που έχει στο ύψος αυτό,

Μονάδες 8

Δ4) το χρονικό διάστημα της κίνησης της πέτρας από τη χρονική στιγμή που εκτοξεύτηκε μέχρι την χρονική στιγμή που φτάνει στην επιφάνεια του νερού.

Μονάδες 5

Θεωρήστε ως επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια την επιφάνεια της θάλασσας και την επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με $g = 10 \text{ m/s}^2$. Η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα.



Ενδεικτική Λύση

Δ1) Αρχικά η πέτρα έχει κινητική και δυναμική ενέργεια

$$E_{MHX} = \frac{1}{2} m v_A^2 + m g H \quad \text{ή} \quad E_{MHX} = 15 J$$

Δ2) Η πέτρα έχει στο σημείο Α αρχικό ύψος 10 m και θα συνεχίσει να ανεβαίνει κατά h μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα του.

Ο χρόνος κίνησης και το ύψος h θα υπολογιστούν από τις σχέσεις (1) και (2) :

$$v = v_A - g t \quad (1) \quad \text{με } v=0$$

$$h = v_A t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

Το ανώτερο ύψος που φτάνει η πέτρα θα ισούται με το άθροισμα

$$H + h = 15 \text{ m.}$$

Στο ανώτερο σημείο θα έχει δυναμική ενέργεια 15 J.

Δ3) Η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του σώματος¹, μέχρι να πέσει στη θάλασσα.

Όταν λοιπόν η κινητική και η δυναμική ενέργεια της πέτρας είναι ίσες και το άθροισμά τους ισούται με τη μηχανική ενέργεια, προκύπτει ότι κάθε μια ενέργεια θα έχει τιμή δηλαδή

$$K=U \quad \text{και} \quad E_{MHX} = K + U \quad \text{συνεπώς} \quad K = U = \frac{E_{MHX}}{2} \quad \text{ή} \quad K = U = \frac{15}{2} J \quad \text{ή} \quad K = U = 7,5 J \quad (3)$$

Συνεπώς από τον τύπο της δυναμικής ενέργειας: $U = m g h$ και τη σχέση (3) προκύπτει το ύψος $h' = 7,5 \text{ m}$ από την επιφάνεια της θάλασσας, όπου οι δυναμική ενέργεια είναι ίση με την κινητική.

Δ4) Ο χρόνος ανόδου, από (1) υπολογίστηκε σε 1 s.

Ο χρόνος καθόδου (ελεύθερη πτώση) για ύψος 15 m υπολογίζεται σε $\sqrt{3}$ s από την πιο κάτω σχέση:

$$h = \frac{1}{2} g t_2^2$$

Συνεπώς η πέτρα κινήθηκε συνολικά για $(1 + \sqrt{3})$ s.

¹ (η πέτρα κινείται μόνο υπό την επίδραση του βάρους)

ΘΕΜΑ Α

Ένα αυτοκίνητο μάζας $m = 1000 \text{ kg}$ ξεκινάει από την ηρεμία και κινείται με σταθερή επιτάχυνση $a = 2 \text{ m / s}^2$ σε ευθύγραμμο δρόμο για χρονικό διάστημα $\Delta t_1 = 10 \text{ s}$. Στη συνέχεια με την ταχύτητα που απέκτησε κινείται ομαλά για $\Delta t_2 = 10 \text{ s}$. Στη συνέχεια αποκτά σταθερή επιβράδυνση με την οποία κινείται για χρονικό διάστημα $\Delta t_3 = 5 \text{ s}$ με αποτέλεσμα να σταματήσει.

Δ1) Να υπολογίσετε το διάστημα που διάνυσε το αυτοκίνητο στο χρονικό διάστημα Δt_1 .

Μονάδες 5

Δ2) Να παραστήσετε γραφικά το μέτρο της ταχύτητας του αυτοκινήτου σε συνάρτηση με το χρόνο, σε βαθμολογημένους άξονες, για όλη τη χρονική διάρκεια της κίνησης του.

Μονάδες 7

Δ3) Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου για όλη τη χρονική διάρκεια της κίνησής του.

Μονάδες 7

Δ4) Να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται στο αυτοκίνητο, σε όλη τη χρονική διάρκεια της κίνησης του.

Μονάδες 6

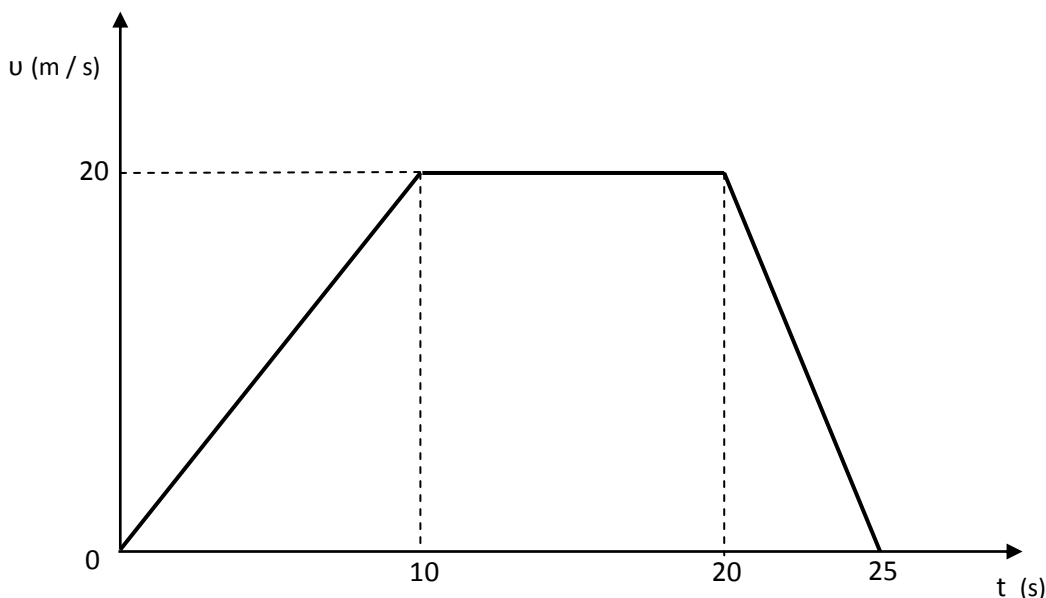
Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το χρονικό διάστημα Δt_1 το αυτοκίνητο μετατοπίζεται κατά:

$$S_1 = \Delta x_1 = \frac{1}{2} a \Delta t_1^2 \quad \text{ή} \quad S_1 = 100 \, m$$

Δ2) Το χρονικό διάστημα Δt_2 κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = a \Delta t_1$ ή $v = 20 \, m/s$ και το χρονικό διάστημα Δt_3 θα κινηθεί μέχρι να ακινητοποιηθεί.

Οπότε η γραφική παράσταση της ταχύτητας ως προς το χρόνο κίνησης θα είναι ως εξής:



Δ3) Το χρονικό διάστημα Δt_2 μετατοπίζεται κατά:

$$\Delta x_2 = v \Delta t_2 \quad \text{ή} \quad \Delta x_2 = 200 \, m$$

Και το χρονικό διάστημα Δt_3 θα κινηθεί μέχρι να ακινητοποιηθεί με επιβράδυνση

$$a' = \frac{v}{\Delta t_3} \quad \text{ή} \quad a' = 4 \, \frac{m}{s^2}$$

και μετατοπίζεται κατά: $\Delta x_3 = v \Delta t_3 - \frac{1}{2} a' \Delta t_3^2$ ή $\Delta x_3 = 50 \, m$

Άρα

$$v_\mu = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} \quad \text{ή} \quad v_\mu = 14 \, \frac{m}{s}$$

Δ4) Με βάση το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας - Έργου από την αρχή της κίνησης του αυτοκινήτου μέχρι το τέλος της, προκύπτει ότι το συνολικό έργο της συνισταμένης δύναμης για όλη τη διάρκεια της κίνησης του είναι μηδενικό.

ΘΕΜΑ Α

Ένα σώμα μάζας 4 kg κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 5 \text{ m/s}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ασκείται στο σώμα, δύναμη ίδιας κατεύθυνσης με τη ταχύτητά του και μέτρου 20 N, οπότε το σώμα κινείται με επιτάχυνση το μέτρο της οποίας είναι ίσο με 4 m/s^2

Δ1) Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του σώματος, από τη χρονική στιγμή $t = 0$, μέχρι τη στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$.

Μονάδες 5

Δ2) Να εξετάσετε αν ασκείται στο σώμα δύναμη τριβής και αν ασκείται, τότε να υπολογίσετε το μέτρο της.

Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος, τη χρονική στιγμή t_2 που το σώμα έχει μετατοπιστεί κατά 25 m από το σημείο στο οποίο άρχισε να ασκείται η δύναμη $\vec{F}$.

Μονάδες 7

Δ4) Τη χρονική στιγμή t_2 παύει να ασκείται η δύναμη $\vec{F}$, όμως το σώμα συνεχίζει την κίνηση του στο οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογίσετε το διάστημα που θα διανύσει το σώμα από τη χρονική στιγμή t_2 , μέχρι να σταματήσει να κινείται.

Μονάδες 7

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το σώμα κάνει ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, οπότε υπολογίζουμε την μετατόπιση από τη σχέση:

$$\Delta x = v_o t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x = 75 \text{ m}$$

Δ2) Αν ασκούσαν μόνο η δύναμη $F = 20 \text{ N}$ στο σώμα τότε σύμφωνα με το 2^ο νόμο του Νεύτωνα θα είχε επιτάχυνση 5 m/s^2 .

Η επιτάχυνση όμως του σώματος είναι μικρότερη, άρα θα ασκείται και η δύναμη της τριβής η οποία πάλι από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα υπολογίζεται σε 4 N .

Δ3) Η χρονική στιγμή όπου το σώμα έχει διανύσει πλέον 25 m υπολογίζεται από την σχέση:

$$\Delta x_2 = v_o t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2$$

Ο χρόνος υπολογίζεται σε $2,5 \text{ s}$

Εκείνη τη χρονική στιγμή έχει ταχύτητα:

$$v = v_o + a t_2 \quad \text{ή} \quad v = 15 \text{ m/s}$$

Δ4) Μετά τη χρονική στιγμή t_2 το σώμα κάνει ευθύγραμμα ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση (υπό την επίδραση της τριβής), με επιτάχυνση 1 m/s^2 αντίθετη στη φορά της κίνησης. Με βάση τους τύπους της επιβραδυνόμενης κίνησης

$$0 = v - a' t_3$$

$$\Delta x' = v t_3 - \frac{1}{2} a' t_3^2$$

βρίσκουμε τη μετατόπιση

$$\Delta x' = 112,5 \text{ m}$$

ΘΕΜΑ Δ

Ένα αυτοκίνητο μάζας 1000 kg κινείται αρχικά σε ευθύγραμμο οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα μέτρου ίσου με 10 m/s. Ο οδηγός του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή $t = 0$, πατώντας το γκάζι προσδίνει στο αυτοκίνητο σταθερή επιτάχυνση και τη χρονική στιγμή $t_1 = 10$ s, το μέτρο της ταχύτητας του αυτοκινήτου έχει διπλασιαστεί.

Να υπολογίσετε:

Δ1) τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του αυτοκινήτου στο παραπάνω χρονικό διάστημα των 10 s,

Μονάδες 6

Δ2) το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που επιτάχυνε το αυτοκίνητο,

Μονάδες 6

Δ3) τη μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου στο χρονικό διάστημα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ s έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 10$ s,

Μονάδες 8

Δ4) το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που έπρεπε να ασκείται στο αυτοκίνητο ώστε να διπλασιαστεί πάλι η αρχική του ταχύτητα, διανύοντας όμως τη μισή μετατόπιση από ότι στη προηγούμενη περίπτωση.

Μονάδες 5

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας υπολογίζεται ως εξής:

$$\Delta K = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \quad \text{ή} \quad \Delta K = \frac{1}{2} m [(2v)^2 - v^2] \quad \text{ή} \quad \Delta K = 150000 \, \text{J}$$

Δ2) Το αυτοκίνητο κάνει ευθύγραμμο ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση για 10 s, οπότε:

$$2v = v + a t_1 \Rightarrow a = 1 \, \text{m/s}^2$$

Και από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα προκύπτει ότι η συνισταμένη δύναμη ισούται με 1000 N

Δ3) Το αυτοκίνητο για το χρονικό διάστημα των 10 s μετατοπίστηκε κατά:

$$\Delta x = v t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x = 150 \, \text{m}$$

Συνεπώς η μέση ταχύτητα προκύπτει από το πηλίκο: μήκος διαδρομής προς το χρονικό διάστημα και ισούται με: $15 \, \text{m/s}$

Δ4) Διπλασιάζεται πάλι η ταχύτητα, τώρα όμως σε μετατόπιση

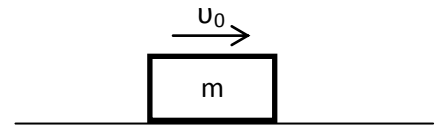
$$\Delta x' = \frac{150}{2} \quad \text{ή} \quad \Delta x' = 75 \, \text{m}.$$

Μέσω του Θεωρήματος Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας-Έργου υπολογίζεται το έργο και η τιμή της νέας συνισταμένης δύναμης που θα ασκηθεί στο αυτοκίνητο.

$$\Delta K = \Sigma F' \cdot \Delta x' \Rightarrow \Sigma F' = 2000 \, \text{N}$$

ΘΕΜΑ Α

Μικρό σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ εκτοξεύεται με οριζόντια αρχική ταχύτητα $v_0 = 20 \text{ m/s}$ σε οριζόντιο επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα.



Το σώμα ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,5$.

Δίνεται ότι η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$

Να υπολογίσετε:

Δ1) το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το σώμα,

Μονάδες 5

Δ2) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$,

Μονάδες 5

Δ3) τη μετατόπιση του σώματος στο τελευταίο δευτερόλεπτο της κίνησής του,

Μονάδες 8

Δ4) το συνολικό έργο της τριβής ολίσθησης, από τη χρονική στιγμή της εκτόξευσης, μέχρι τη στιγμή που θα σταματήσει το σώμα να κινείται.

Μονάδες 7

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το σώμα ολισθαίνει προς τα δεξιά ενώ ασκείται πάνω του η δύναμη της τριβής με φορά προς τα αριστερά.

Από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα προκύπτει ότι η επιτάχυνση με την οποία κινείται το σώμα είναι:

$$\mu m g = m a \Rightarrow a = 5 \frac{m}{s^2},$$

με φορά αντίθετη προς την ταχύτητα του σώματος.

Δ2) Το σώμα κινείται ευθύγραμμα με την επιβράδυνση που υπολογίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Μετά από χρόνο t_1 η ταχύτητα θα είναι:

$$v = v_0 - a t_1 \quad \text{ή} \quad v = 10 \text{ m/s}$$

Δ3) Με βάση τον προηγούμενο τύπο θέτοντας $v=0$ μπορούμε να υπολογίσουμε ότι το σώμα θα ακινητοποιηθεί μετά από 4 s από τη χρονική στιγμή t_0 .

Ενώ η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 3 \text{ s}$ είναι 5 m/s .

Συνεπώς αναζητούμε τη μετατόπιση του σώματος το χρονικό διάστημα μεταξύ 3^{ου} και 4^{ου} s.

Ένας από τους τρόπους που μπορούμε να υπολογίσουμε αυτή τη μετατόπιση είναι το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας-Έργου για το πιο πάνω χρονικό διάστημα.

$$\Delta K = K_4 - K_3 \quad \text{ή} \quad \Delta K = -T \Delta x_{3-4} \Rightarrow \Delta x_{3-4} = 2,5 \text{ m}$$

Δ4) Πάλι με βάση το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας-Έργου, συνολικά για όλη την κίνηση, προκύπτει:

$$\Delta K = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \quad \text{ή} \quad \Delta K = W_T \quad \text{ή} \quad W_T = -400 \text{ J}$$

ΘΕΜΑ Α

Μικρό σώμα μάζας $m = 5 \text{ kg}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του οριζόντιου επιπέδου είναι $\mu = 0,4$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ ασκείται στο σώμα σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ μέτρου ίσο με 50 N με την επίδραση της οποίας το σώμα αρχίζει να κινείται στο οριζόντιο επίπεδο.

Δίνεται ότι η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m / s}^2$

Να υπολογίσετε:

Δ1) το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το σώμα

Μονάδες 7

Δ2) την κινητική ενέργεια του σώματος την χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$,

Μονάδες 6

Δ3) το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, μέχρι τη στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$,

Μονάδες 8

Δ4) τη μέση ισχύ που προσφέρθηκε στο σώμα, μέσω της δύναμης $\vec{F}$, στη χρονική διάρκεια από την $t_0 = 0$ μέχρι τη στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$.

Μονάδες 5

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το σώμα ξεκινά να κινείται, ενώ στον οριζόντιο άξονα του ασκούνται δύο δυνάμεις:
η δύναμη F και η τριβή.

Η συνισταμένη δύναμη

$$\Sigma F = F - T \quad \text{ή} \quad \Sigma F = 30 \text{ N}.$$

Σύμφωνα με το 2^ο νόμο του Νεύτωνα η επιτάχυνση

$$a = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Δ2) Μετά από χρόνο 2 s η ταχύτητα του σώματος θα είναι:

$$v = a \cdot t_1 \quad \text{ή} \quad v = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Συνεπώς η κινητική ενέργεια εκείνη τη χρονική στιγμή θα είναι

$$K = 360 \text{ J}$$

Δ3) Η μετατόπιση του σώματος για το χρονικό διάστημα των 2 s ισούται με:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a \cdot t_1^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x = 12 \text{ m}.$$

Και από τον ορισμό του έργου:

$$W_F = F \cdot \Delta x \quad \text{ή} \quad W_F = 600 \text{ J}$$

Δ4) Η ισχύς που προσφέρθηκε στο σώμα υπολογίζεται ως το πηλίκο του έργου που προσφέρεται προς το χρονικό διάστημα που προσφέρεται:

$$P = \frac{W_F}{t} \quad \text{ή} \quad P = 300 \text{ W}$$

ΘΕΜΑ Α

Ένας μαθητής ξεκινά την χρονική στιγμή $t = 0$, να παρατηρεί ένα σώμα μάζας $m = 10 \text{ kg}$ που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v_1 = 20 \text{ m/s}$. Το σώμα διανύει διάστημα $s_1 = 100 \text{ m}$ κινούμενο με σταθερή ταχύτητα και στη συνέχεια επιβραδύνεται με σταθερή επιβράδυνση μέχρι να σταματήσει. Αν γνωρίζετε ότι η χρονική διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης είναι $\Delta t = 5 \text{ s}$ τότε:

Α1) να υπολογίσετε το μέτρο της επιβράδυνσης του σώματος,

Μονάδες 5

Α2) να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση του μέτρου της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο σε βαθμολογημένους άξονες από την χρονική στιγμή $t = 0$ έως την χρονική στιγμή που το σώμα σταματά,

Μονάδες 7

Α3) να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του σώματος για τη συνολική χρονική διάρκεια που ο μαθητής παρατήρησε την κίνηση του,

Μονάδες 7

Α4) να υπολογίσετε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του τραχέος τμήματος του δρόμου στον οποίο κινείται, αν γνωρίζετε ότι η τριβή ολίσθησης είναι η μοναδική δύναμη που επιβραδύνει το σώμα.

Μονάδες 6

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Για την ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση ισχύει:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-20}{5} = -4m/s^2, \text{ άρα το μέτρο της επιβράδυνσης είναι } 4m/s^2.$$

Δ2) Από την εξίσωση του διαστήματος στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση υπολογίζουμε τη χρονική διάρκεια παρατήρησης Δt_1 αυτής της κίνησης από το μαθητή:

$$S_1 = v \cdot \Delta t_1 \quad \text{ή} \quad \Delta t_1 = 5s,$$

Οπότε το σώμα ξεκινά να επιβραδύνεται την χρονική στιγμή t_1 με:

$$\Delta t_1 = (t_1 - 0) = t_1 = 5s$$

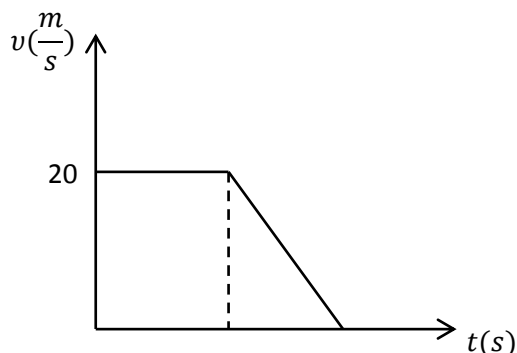
και σταματά την χρονική στιγμή t_2 με:

$$\Delta t = (t_2 - t_1) \text{ ή } t_2 = 10s.$$

Για τα μέτρα των ταχυτήτων ισχύει:

$$v = 10 \frac{m}{s} \quad \text{για} \quad 0 \leq t \leq 5s \quad \text{και} \quad v = 10 - 4t \quad \text{για} \quad 5s < t \leq 10s,$$

Από τα οποία προκύπτει η ζητούμενη γραφική παράσταση:



Δ3) Το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης $v = f(t)$ και του άξονα των χρόνων είναι αριθμητικά ίσο με το συνολικό διάστημα που διανύει το κινητό:

$$S_{ολ} = \frac{(5+10) \cdot 20}{2} = 150m$$

Και η μέση ταχύτητα του σώματος: $v_{\mu} = \frac{S_{ολ}}{t_{ολ}} = 15m/s.$

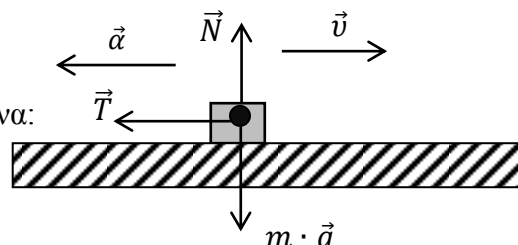
Δ4) Εφαρμόζουμε τον 1^ο νόμο του Newton στον κατακόρυφο άξονα:

$$\sum \vec{F} = 0 \text{ ή } N = mg = 100N$$

Και τον 2^ο νόμο του Newton στον οριζόντιο άξονα λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης:

$$T = m \cdot a \quad \text{ή} \quad T = 40N.$$

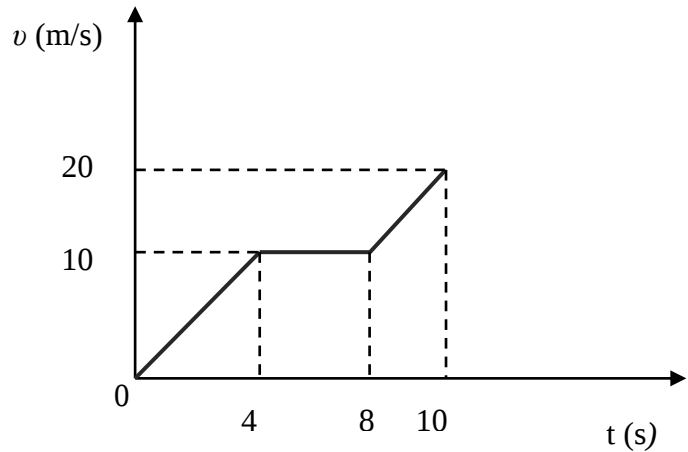
$$\text{Άρα} \quad T = \mu \cdot N \quad \text{ή} \quad \mu = 0,4.$$



ΘΕΜΑ Α

Στο διάγραμμα του σχήματος φαίνεται η γραφική παράσταση της τιμής της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο για ένα σώμα που κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο.

Δ1) Να υπολογίσετε τα μέτρα των επιταχύνσεων a_1 και a_2 με τις οποίες κινείται το σώμα κατά τα χρονικά διαστήματα $0 \text{ s} - 4 \text{ s}$ και $8 \text{ s} - 10 \text{ s}$ αντίστοιχα.



Μονάδες 5

Δ2) Να κατασκευάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση της τιμής της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο, από τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ έως και την χρονική στιγμή $t = 10 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του σώματος κατά το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 10 \text{ s}$

Μονάδες 7

Δ4) Αν K_1 και K_2 είναι οι τιμές της κινητικής ενέργειας του σώματος τις χρονικές στιγμές $t_1 = 2 \text{ s}$ και $t_2 = 9 \text{ s}$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{K_1}{K_2}$

Μονάδες 7

Ενδεικτική Λύση

Δ1)

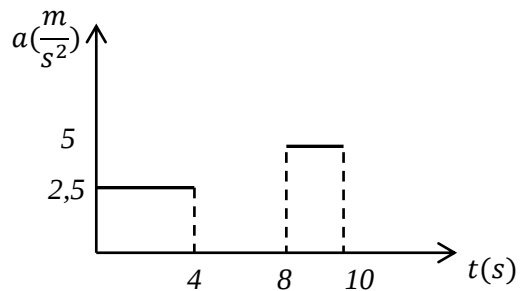
$$0 \text{ s} - 4 \text{ s:} \quad \alpha_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10-0}{4-0} = 2,5 \text{ m/s}^2$$

$$8 \text{ s} - 10 \text{ s:} \quad \alpha_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20-10}{10-8} = 5 \text{ m/s}^2$$

Δ2)

$$\text{Ισχύει } 4 \text{ s} - 8 \text{ s:} \quad \alpha_3 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10-10}{8-4} = 0$$

Και με την βοήθεια των υπολογισμών που έγιναν στο ερώτημα Δ1 κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση $a = f(t)$:



Δ3) Το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης $v = f(t)$ και του άξονα των χρόνων είναι αριθμητικά ίσο με το διάστημα που διανύει το κινητό:

$$0 \text{ s} - 4 \text{ s:} \quad S_1 = \frac{4 \cdot 10}{2} = 20 \text{ m}$$

$$4 \text{ s} - 8 \text{ s:} \quad S_2 = 4 \cdot 10 = 40 \text{ m}$$

$$8 \text{ s} - 10 \text{ s:} \quad S_3 = \frac{(20+10) \cdot 2}{2} = 30 \text{ m}$$

$$\text{Και η μέση ταχύτητα του σώματος: } v_\mu = \frac{S_{\text{ολ}}}{t_{\text{ολ}}} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{t_{\text{ολ}}} = \frac{90}{10} = 9 \text{ m/s}$$

Δ4) Για $0 \leq t \leq 4 \text{ s}$ ισχύει $v = a \cdot t = 2,5 \cdot t$.

Άρα την χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ η τιμή της ταχύτητας του σώματος είναι

$$v_1 = 5 \text{ m/s}$$

και η κινητική του ενέργεια :

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = 12,5 m, \text{ όπου } m \text{ η μάζα του σώματος.}$$

Για $8 \text{ s} \leq t \leq 10 \text{ s}$ ισχύει $v = v_0 + a \cdot \Delta t = 10 + 5 \cdot (t - 8)$.

Άρα την χρονική στιγμή $t_2 = 9 \text{ s}$ η τιμή της ταχύτητας του σώματος είναι

$$v_2 = 15 \text{ m/s} \text{ και η κινητική του ενέργεια :}$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = 112,5 m..$$

Άρα ο λόγος των κινητικών ενεργειών είναι ίσος με: $\frac{K_1}{K_2} = \frac{1}{9}$

ΘΕΜΑ Α

Στο δάπεδο του διαδρόμου του σχολείου βρίσκεται ακίνητο ένα κιβώτιο με βιβλία συνολικής μάζας $m = 20 \text{ kg}$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο Γιάννης αρχίζει να σπρώχνει το κιβώτιο ασκώντας σε αυτό οριζόντια σταθερή δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 50 N . Την χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ η ταχύτητα του κιβώτιου έχει μέτρο, $v = 2 \text{ m/s}$ και ο Γιάννης σταματά να σπρώχνει το κιβώτιο. Στη συνέχεια το κιβώτιο κινείται για λίγο ακόμη πάνω στο δάπεδο και τέλος σταματά.. Δίνεται ότι η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Να υπολογίσετε:

Δ1) την επιτάχυνση του κιβωτίου στη χρονική διάρκεια που ο Γιάννης έσπρωχνε το κιβώτιο,

Μονάδες 5

Δ2) το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του κιβωτίου και του δαπέδου,

Μονάδες 7

Δ3) την ενέργεια που προσφέρθηκε από το Γιάννη στο κιβώτιο, μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$.

Μονάδες 6

Δ4) το συνολικό διάστημα που διάνυσε το κιβώτιο πάνω στο δάπεδο, από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, μέχρι να σταματήσει.

Μονάδες 7

Ενδεικτική Λύση

Δ1) $0 \text{ s} - 4 \text{ s}$: $\alpha_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2-0}{4-0} = 0,5 \text{ m/s}^2$ και κατεύθυνση ίδια με αυτήν της ταχύτητας του κιβωτίου.

Δ2) $0 \text{ s} - 4 \text{ s}$: Εφαρμόζουμε τον 1^ο νόμο του Newton στον κατακόρυφο άξονα:

$$\sum F_{\psi} = 0 \quad \text{ή} \quad N = mg = 200 \text{ N}$$

Και τον 2^ο νόμο του Newton στον οριζόντιο άξονα λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης:

$$F - T = m \cdot a \quad \text{ή} \quad T = 40 \text{ N}.$$

$$\text{Άρα } T = \mu \cdot N \quad \text{ή} \quad \mu = 0,2.$$

Δ3) Από $0 \rightarrow t_1$, το κιβώτιο με τα βιβλία εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και με χρήση της αντίστοιχης εξίσωσης υπολογίζεται η μετατόπιση του:

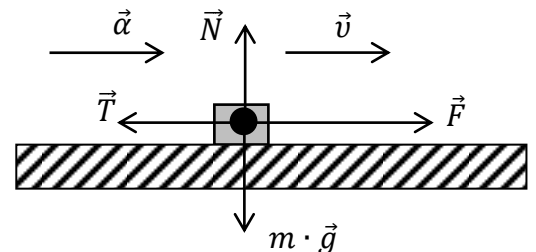
$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = 4 \text{ m}$$

Και το έργο της $\vec{F}$ για αυτήν την μετατόπιση:

$$W_F = F \Delta x_1 \sin 0^\circ = 200 \text{ J}$$

Δ4) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής ενέργειας-Εργου (ΘΜΚΕ) από την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ και για την συνολική μετατόπιση του κιβωτίου $\Delta \vec{x}_{o\lambda}$:

$$K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_F + W_T \quad \text{ή} \quad 0 - 0 = 200 - T \cdot \Delta x_{o\lambda} \quad \text{ή} \quad \boxed{\Delta x_{o\lambda} = 5 \text{ m}}$$



ΘΕΜΑ Δ

Από ένα στρατιωτικό ελικόπτερο, που για λίγο αιωρείται ακίνητο σε κάποιο ύψος πάνω από ένα φυλάκιο, αφήνεται ένα δέμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ για να το παραλάβουν οι στρατιώτες του φυλακίου. Το δέμα πέφτει κατακόρυφα και διέρχεται από ένα σημείο (Α) της τροχιάς του με ταχύτητα μέτρου 10 m/s και από ένα άλλο σημείο (Β) με ταχύτητα μέτρου 20 m/s . Το σημείο (Β) βρίσκεται πιο κοντά στο έδαφος και απέχει από το σημείο (Α), απόσταση 30 m . Ο αέρας ασκεί δύναμη $\vec{F}$ στο δέμα η οποία έχει την ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετη φορά από την ταχύτητα του δέματος. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Δ1) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κιβωτίου μεταξύ των θέσεων Α και Β.

Μονάδες 6

Δ2) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}$ κατά τη διαδρομή του δέματος από το Α ως το Β.

Μονάδες 7

Αν με τα παραπάνω δεδομένα, υποθέσουμε για λόγους απλότητας ότι η δύναμη $\vec{F}$ είναι σταθερή, να υπολογίσετε:

Δ3) το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

Μονάδες 6

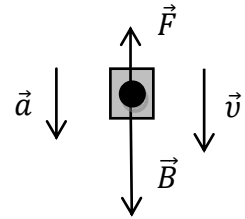
Δ4) το χρόνο κίνησης του δέματος μεταξύ των σημείων Α και Β.

Μονάδες 6

Ενδεικτική Λύση

$$\Delta 1) \Delta K = K_B - K_A \quad \text{ή} \quad \Delta K = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \quad \text{ή} \quad \boxed{\Delta K = 300J} \quad (1)$$

$\Delta 2)$ Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας – Έργου (ΘΜΚΕ) από το σημείο Α στο σημείο Β:



$$K_B - K_A = W_F + W_B$$

$$\text{Από τη σχέση (1)} \quad 300 = W_F + m \cdot g \cdot h \quad \text{ή} \quad \boxed{W_F = -300J} \quad (2).$$

$\Delta 3)$ Από την σχέση υπολογισμού του έργου σταθερής δύναμης έχουμε:

$$W_F = F \cdot \Delta y_{AB} \cdot \sin 180^\circ \quad \text{ή από τη σχέση (2)} \quad -300 = -30 \cdot F \quad \text{ή} \quad \boxed{F = 10N}$$

$\Delta 4)$ Εφαρμόζουμε το 2^ο νόμο του Newton λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης:

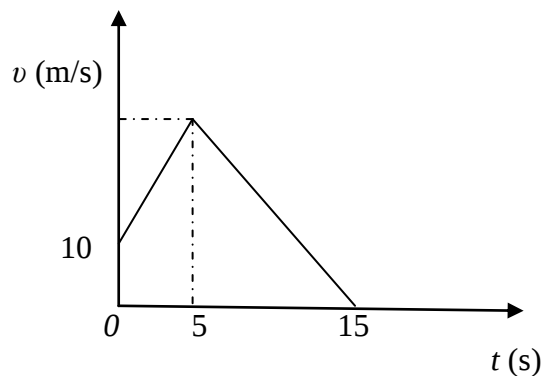
$$B - F = m \cdot a \quad \text{ή} \quad a = 5 \frac{m}{s^2}$$

Και από τον ορισμό της, υπολογίζουμε την χρονική διάρκεια της μετάβασης του δέματος μεταξύ των σημείων (Α) και (Β):

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta t = \frac{20 - 10}{5} \quad \text{ή} \quad \boxed{\Delta t = 2s}$$

ΘΕΜΑ Α

Ένα κιβώτιο μάζας $m = 20 \text{ kg}$ κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο δάπεδο. Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του κιβωτίου σε συνάρτηση με το χρόνο. Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης στα 5 πρώτα δευτερόλεπτα της κίνησης του κιβωτίου είναι $\Sigma F = 40 \text{ N}$.



Δ1) Να χαρακτηρίσετε τα είδη των κινήσεων που εκτελεί το κιβώτιο στις χρονικές διάρκειες 0 έως 5 s και 5 s έως 15 s.

Μονάδες 5

Να υπολογίσετε:

Δ2) το μέτρο της επιτάχυνσης και της μετατόπισης του κιβωτίου, στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow 5 \text{ s}$,

Μονάδες 7

Δ3) τη μέση ταχύτητα του κιβωτίου στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow 15 \text{ s}$,

Μονάδες 6

Δ4) το έργο της συνισταμένης δύναμης στη χρονική διάρκεια $5 \text{ s} \rightarrow 15 \text{ s}$.

Μονάδες 7

Ενδεικτική λύση

Δ1) $0 \rightarrow 5 \text{ s}$: Ευθύγραμμη ομαλή επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα.

$5 \text{ s} \rightarrow 15 \text{ s}$: Ευθύγραμμη ομαλή επιβραδυνόμενη κίνηση.

Δ2) Έστω $\vec{a}_1$ η επιτάχυνση του κιβωτίου και S_1 το διάστημα που διανύει το κιβώτιο στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow 5 \text{ s}$. Από το δεύτερο νόμο του Newton υπολογίζουμε το μέτρο της επιτάχυνσης:

$$\sum F = m \cdot a_1 \quad \text{ή} \quad a_1 = 2 \frac{m}{s^2}$$

Από την εξίσωση της επιτάχυνσης υπολογίζουμε την τιμή της ταχύτητας v_1 τη χρονική στιγμή 5s :

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad 2 = \frac{v_1 - 10}{5} \quad \text{ή} \quad v_1 = 20 \frac{m}{s}$$

Το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης $v = f(t)$ και του άξονα των χρόνων είναι αριθμητικά ίσο με τη μετατόπιση του κινητού:

$$0 \text{ s} - 5 \text{ s}: \quad \Delta x_1 = \frac{(10+20) \cdot 5}{2} \quad \text{ή} \quad \Delta x_1 = 75m.$$

Παρατήρηση: Το διάστημα και η μετατόπιση έχουν την ίδια τιμή καθώς η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας είναι θετική και κατά την κίνηση το κιβώτιο δεν αλλάζει φορά.

Δ3) Έστω S_2 το διάστημα που διανύει το κιβώτιο στη χρονική διάρκεια $5\text{s} \rightarrow 15 \text{ s}$. Σύμφωνα με το ερώτημα Δ2:

$$S_2 = \frac{10 \cdot 20}{2} \quad \text{ή} \quad S_2 = 100m$$

$$\text{Και η μέση ταχύτητα του σώματος: } v_\mu = \frac{S_{ολ}}{t_{ολ}} \quad \text{ή} \quad v_\mu = \frac{175}{15} \quad \text{ή} \quad \boxed{v_\mu = \frac{35}{3} \frac{m}{s}}.$$

Δ4) $5\text{s} \rightarrow 15 \text{ s}$: Από την εξίσωση της επιτάχυνσης υπολογίζουμε την αλγεβρική τιμή της (a_2) και από το 2^ο νόμο του Newton τη συνισταμένη δύναμη:

$$a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad a_2 = \frac{0 - 20}{15 - 5} \quad \text{ή} \quad a_2 = -2 \frac{m}{s^2}$$

$$\sum F = m \cdot a_2 \quad \text{ή} \quad \sum F = -40N$$

Το αρνητικό πρόσημο στις αλγεβρικές τιμές της επιτάχυνσης και της συνισταμένης δύναμης δηλώνει ότι τα αντίστοιχα διανύσματα είναι ομόρροπα μεταξύ τους και αντίρροπα με αυτό της ταχύτητας (θετική αλγεβρική τιμή).

Και τέλος για το $W_{\Sigma F}$ ισχύει:

$$W_{\Sigma F} = \Sigma F \cdot \Delta x_2 \quad \text{ή} \quad \boxed{W_{\Sigma F} = -4000J}$$

Εναλλακτικά, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας – Έργου για την μετατόπιση του κινητού κατά την επιβραδυνόμενη κίνησή του:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{\Sigma F} \quad \text{ή} \quad 0 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_{\Sigma F} \quad \text{ή} \quad \boxed{W_{\Sigma F} = -4000J}.$$

ΘΕΜΑ Α

Ένα κιβώτιο μάζας 5 kg είναι αρχικά ακίνητο σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ασκείται στο κιβώτιο σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F_1 = 20 \text{ N}$ με αποτέλεσμα το κιβώτιο να επιταχύνεται. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$, αρχίζει να ασκείται στο κιβώτιο και άλλη σταθερή δύναμη $\vec{F}_2$, με φορά αντίθετη από αυτήν που είχε η $\vec{F}_1$, οπότε η ταχύτητα του κιβωτίου μηδενίζεται τη στιγμή $t_2 = 9 \text{ s}$.

Δ1) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του κιβωτίου τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ2) Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του κιβωτίου κατά την διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης, καθώς και το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_2$.

Μονάδες 8

Δ3) Να παραστήσετε γραφικά το μέτρο της ταχύτητας του κιβωτίου, σε συνάρτηση με το χρόνο σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων, για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 9 \text{ s}$ και να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του κιβωτίου στο ίδιο χρονικό διάστημα.

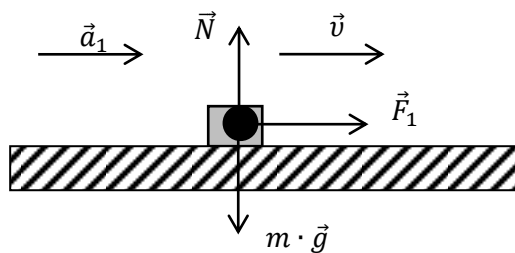
Μονάδες 6

Δ4) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}_2$ στο χρονικό διάστημα $5 \text{ s} \rightarrow 9 \text{ s}$.

Μονάδες 5

Ενδεικτική Λύση

Δ1)



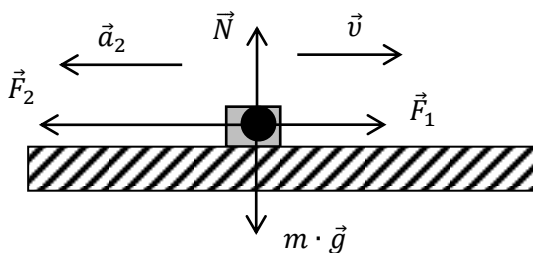
0 → 5 s: Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου a_1 . Εφαρμόζουμε τον 2^ο νόμο του Newton στον οριζόντιο άξονα λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης:

$$\Sigma F = m \cdot a_1 \quad \text{ή} \quad \alpha_1 = \frac{F_1}{m} \quad \text{ή} \quad \alpha_1 = 4 \frac{m}{s^2}$$

Με τη βοήθεια της εξίσωσης της ταχύτητας υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}_1$:

$$v_1 = \alpha_1 \cdot t_1 \quad \text{ή} \quad \boxed{v_1 = 20 \frac{m}{s}}$$

Δ2)



5 s → 9 s: Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση μέτρου a_2 και αρχική ταχύτητα $\vec{v}_1$:

Με τη βοήθεια της εξίσωσης της ταχύτητας υπολογίζουμε το μέτρο της επιτάχυνσης $\vec{a}_2$:

$$v = v_0 - a \cdot \Delta t \quad \text{ή} \quad 0 = 20 - 4 \cdot a_2 \quad \text{ή} \quad \alpha_2 = 5 \frac{m}{s^2}$$

Εφαρμόζουμε τον 2^ο νόμο του Newton στον οριζόντιο άξονα λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης:

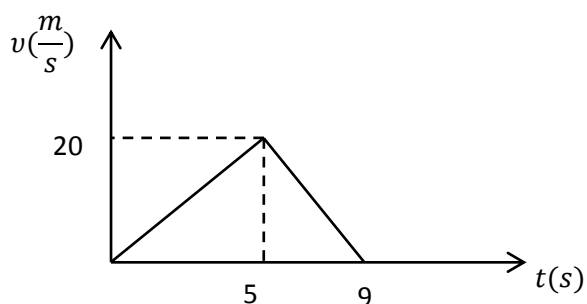
$$\Sigma F = m \cdot a_2 \quad \text{ή} \quad F_2 - F_1 = m \cdot a_2 \quad \text{ή} \quad \boxed{F_2 = 45N}$$

Δ3) Το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης $v = f(t)$ και του άξονα των χρόνων είναι αριθμητικά ίσο με το συνολικό διάστημα που διανύει το κινητό:

$$S_{o\lambda} = \frac{9 \cdot 20}{2} \quad \text{ή} \quad S_{o\lambda} = 90m$$

Και η μέση ταχύτητα του σώματος:

$$v_{\mu} = \frac{S_{o\lambda}}{t_{o\lambda}} \quad \text{ή} \quad \boxed{v_{\mu} = 10 \frac{m}{s}}$$



Δ4) Από την εξίσωση της μετατόπισης στην ευθύγραμμη ομαλή επιβραδυνόμενη κίνηση υπολογίζουμε την μετατόπιση του κύβου στη χρονική διάρκεια $5\text{ s} \rightarrow 9\text{ s}$ ($\Delta t = 4\text{ s}$):

$$\Delta x = v_1 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x = 40m$$

Και στη συνέχεια το έργο της δύναμης $\vec{F}_2$:

$$W_F = F_2 \cdot \Delta x \cdot \sin 180^\circ \quad \text{ή} \quad \boxed{W_F = -1800J}.$$

ΘΕΜΑ Α

Θέλουμε να μετακινήσουμε ένα βαρύ κιβώτιο μάζας 500 kg αναγκάζοντας το να ολισθήσει πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Δίδεται ότι ο συντελεστής τριβής μεταξύ του δαπέδου και του κιβωτίου είναι $\mu = 0,2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

Να θεωρήσετε ότι η τριβή ολίσθησης είναι ίση με τη μέγιστη στατική τριβή (οριακή τριβή), μεταξύ του κιβωτίου και του δαπέδου και ότι η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα.

Δ1) Να υπολογίσετε το μέτρο της ελάχιστης οριζόντιας δύναμης που πρέπει να ασκήσουμε στο κιβώτιο για να το μετακινήσουμε πάνω στο οριζόντιο δάπεδο.

Μονάδες 5

Αν στο αρχικά ακίνητο κιβώτιο ασκηθεί οριζόντια σταθερή δύναμη με μέτρο ίσο με 1500 N, τότε να υπολογίσετε:

Δ2) το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το κιβώτιο.

Μονάδες 7

Δ3) το μέτρο της ταχύτητας που θα έχει το κιβώτιο, αφού διανύσει διάστημα ίσο με 32 m.

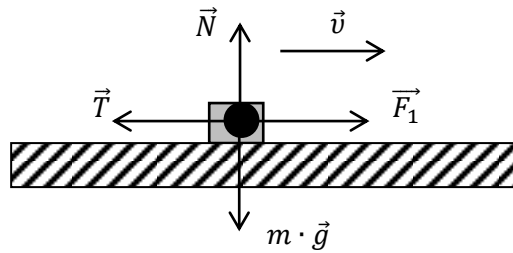
Μονάδες 7

Δ4) Αν κάποια στιγμή μέσω του έργου της δύναμης έχει μεταφερθεί στο κιβώτιο ενέργεια ίση με 3.000 J, τότε να υπολογίσετε το ποσό της ενέργειας που έχει αφαιρεθεί από το σώμα, μέσω του έργου της τριβής ολίσθησης, στο ίδιο χρονικό διάστημα.

Μονάδες 6

Ενδεικτική λύση

Δ1)



Θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή που το κιβώτιο θα ξεκινήσει οριακά να κινείται, θα ισορροπεί και στους δύο άξονες:

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \quad \text{ή} \quad N = m \cdot g \quad \text{ή} \quad N = 5000N$$

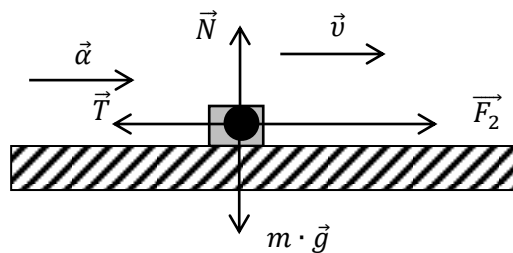
$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \quad \text{ή} \quad F_1 = T$$

Και από το νόμο της τριβής:

$$T = \mu \cdot N \quad \text{ή} \quad T = 1000N$$

$$\text{Άρα, } F_1 = T = 1000N.$$

Δ2) Έστω $\vec{F}_2$, η δύναμη που έχει μέτρο 1500N.



Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου a . Εφαρμόζουμε τον 2^ο νόμο του Newton στον οριζόντιο άξονα λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης:

$$\Sigma F = m \cdot a \quad \text{ή} \quad F_2 - T = m \cdot a \quad \text{ή} \quad \boxed{\alpha = 1 \frac{m}{s^2}}$$

Δ3) Από την εξίσωση της μετατόπισης στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση υπολογίζουμε την χρονική διάρκεια Δt της κίνησης:

$$\Delta x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 \quad \text{ή} \quad \Delta t^2 = \frac{2 \cdot \Delta x}{a} \quad \text{ή} \quad \Delta t^2 = 64 \quad \text{ή} \quad \Delta t = 8s$$

Από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζουμε το ζητούμενο:

$$v = a \cdot \Delta t \quad \text{ή} \quad \boxed{v = 8 \frac{m}{s}}$$

.

Δ4) Με τη βοήθεια του έργου της δύναμης υπολογίζουμε τη μετατόπιση του κιβωτίου:

$$W_F = F_2 \cdot \Delta x \cdot \cos 0^\circ \quad \text{ή} \quad \Delta x = 2m$$

Και στη συνέχεια υπολογίζουμε το έργο της τριβής:

$$W_T = T \cdot \Delta x \cdot \cos 180^\circ \quad \text{ή} \quad W_T = -T \cdot \Delta x \quad \text{ή} \quad \boxed{W_T = -2000J}$$

ΘΕΜΑ Α

Ένα κιβώτιο μάζας $m = 4 \text{ kg}$ βρίσκεται ακίνητο στο έδαφος. Στο κιβώτιο ασκείται σταθερή κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 80 N , με φορά προς τα πάνω, οπότε και αρχίζει να ανυψώνεται κατακόρυφα με σταθερή επιτάχυνση.

Δ1) Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία ανέρχεται το κιβώτιο.

Μονάδες 6

Δ2) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του κιβωτίου, τη χρονική στιγμή, που βρίσκεται σε ύψος $h = 5 \text{ m}$ από το έδαφος.

Μονάδες 6

Δ3) Να αποδείξετε ότι στη διάρκεια της ανόδου του κιβωτίου με τη δράση της δύναμης $\vec{F}$, η δυναμική ενέργεια που έχει σε οποιοδήποτε ύψος είναι ίση με την κινητική του ενέργεια στο ίδιο ύψος.

Μονάδες 6

Δ4) Τη χρονική στιγμή που το κιβώτιο βρίσκεται σε ύψος $h = 5 \text{ m}$ από το έδαφος καταργείται η δύναμη $\vec{F}$. Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος από το έδαφος στο οποίο φθάνει το κιβώτιο.

Μονάδες 7

Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Θεωρήστε ως επίπεδο αναφοράς για τη βαρυτική δυναμική ενέργεια το έδαφος, καθώς και την αντίσταση του αέρα αμελητέα.

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα το μέτρο της συνισταμένης δύναμης είναι

$$\Sigma F = ma \quad \text{ή} \quad F - B = ma \quad \text{ή} \quad 80 - 40 = 4\alpha$$

$$\text{και τελικά } \alpha = 10 \frac{m}{s^2}.$$

Δ2) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας – Έργου (ΘΜΚΕ) έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_F + W_B \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2}mv^2 - 0 = F \cdot h - B \cdot h \quad \text{και τελικά } v = 10 \frac{m}{s}.$$

Δ3) Ισχύει $F = 2B$.

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = F \cdot h - B \cdot h \quad \text{ή} \quad K_{\text{τελ}} = 2B \cdot h - B \cdot h \quad \text{και τελικά } \boxed{K_{\text{τελ}} = U}.$$

Δ4) Τη χρονική στιγμή που καταργείται η δύναμη F το σώμα έχει ταχύτητα $v = 10 \frac{m}{s}$ με φορά προς τα πάνω. Στη συνέχεια το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση g

$$\Sigma F = m \cdot a \quad \text{ή} \quad m \cdot g = m \cdot a.$$

Από τις εξισώσεις κίνησης το κιβώτιο θα φτάσει σε ύψος

$$h' = \frac{v^2}{2g} \quad \text{ή} \quad h' = 5 \text{ m}.$$

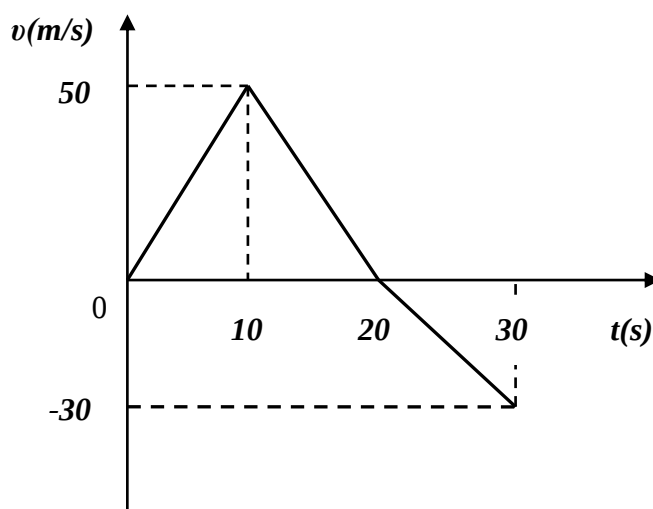
Τελικά, το μέγιστο ύψος από το έδαφος στο οποίο φθάνει το κιβώτιο είναι

$$H = h' + h \quad \text{ή} \quad \boxed{H = 10 \text{ m}}$$

ΘΕΜΑ Α

Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση της τιμής της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο για ένα σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ που κινείται σε οριζόντιο ευθύγραμμο δρόμο.

Δ1) Αντλώντας πληροφορίες από το διάγραμμα να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το σώμα στα χρονικά διαστήματα, $0 \text{ s} \rightarrow 10 \text{ s}$, $10 \text{ s} \rightarrow 20 \text{ s}$ και $20 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s}$.



Μονάδες 6

Δ2) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της αλγεβρικής τιμής της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο σε βαθμολογημένους άξονες για το χρονικό διάστημα από $0 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του σώματος για το χρονικό διάστημα από $0 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ4) Να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης δύναμης για το χρονικό διάστημα από $10 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s}$.

Μονάδες 7

Ενδεικτική Λύση

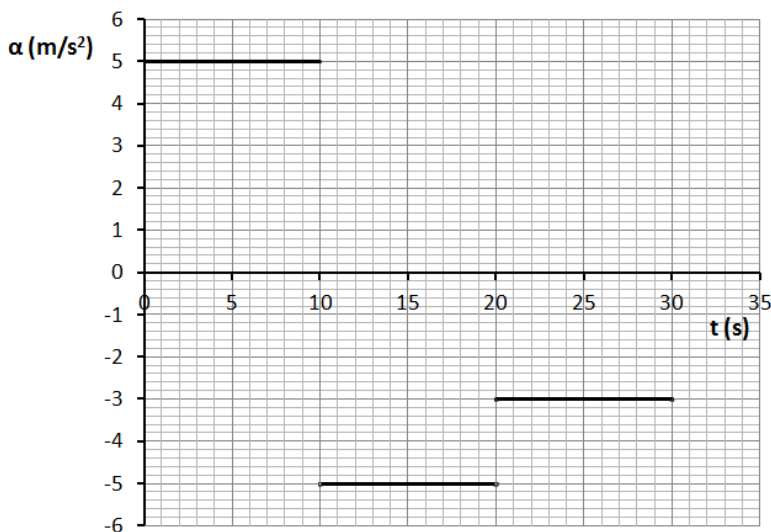
Δ1) Γενικά η κλίση της ευθείας στο διάγραμμα της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνει την επιτάχυνση, οπότε:

Χρονικό διάστημα $0\text{ s} \rightarrow 10\text{ s}$: $\alpha_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1}$ ή $\alpha_1 = \frac{+50\text{ m/s}}{10\text{ s}}$ και τελικά $\boxed{\alpha_1 = +5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$

Χρονικό διάστημα $10\text{ s} \rightarrow 20\text{ s}$: $\alpha_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2}$ ή $\alpha_2 = \frac{-50\text{ m/s}}{10\text{ s}}$ και τελικά $\boxed{\alpha_2 = -5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$

Χρονικό διάστημα $10\text{ s} \rightarrow 20\text{ s}$: $\alpha_3 = \frac{\Delta v_3}{\Delta t_3}$ ή $\alpha_3 = \frac{-30\text{ m/s}}{10\text{ s}}$ και τελικά $\boxed{\alpha_3 = -3\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$

Δ2)



Δ3) Οι μετατοπίσεις του σώματος είναι:

Χρονικό διάστημα $0\text{ s} \rightarrow 10\text{ s}$: $\Delta x_1 = \frac{50 \cdot 10}{2} = +250\text{ m}$

Χρονικό διάστημα $10\text{ s} \rightarrow 20\text{ s}$: $\Delta x_2 = \frac{50 \cdot 10}{2} = +250\text{ m}$

Χρονικό διάστημα $10\text{ s} \rightarrow 20\text{ s}$: $\Delta x_3 = \frac{-30 \cdot 10}{2} = -150\text{ m}$

Το ολικό διάστημα που διήγνυσε το σώμα είναι $S = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| = 650\text{ m}$,

και η μέση ταχύτητα του είναι:

$$v = \frac{S}{t_{\text{ολικο}}} \text{ ή } v = \frac{650\text{ m}}{30\text{ s}} \text{ και τελικά } \boxed{v = \frac{65}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

Δ4) Για το έργο της συνισταμένης δύναμης έχουμε:

Χρονικό διάστημα $10\text{ s} \rightarrow 20\text{ s}$: $W_{\Sigma F_2} = \Sigma F_2 \cdot \Delta x_2 = m \cdot \alpha_2 \cdot \Delta x_2 = 2 \cdot (-5) \cdot (+250) = -2500\text{ J}$.

Χρονικό διάστημα $20\text{ s} \rightarrow 30\text{ s}$: $W_{\Sigma F_3} = \Sigma F_3 \cdot \Delta x_3 = m \cdot \alpha_3 \cdot \Delta x_3 = 2 \cdot (-3) \cdot (-150) = +900\text{ J}$.

Και το συνολικό έργο για το χρονικό διάστημα από $10\text{ s} \rightarrow 30\text{ s}$ είναι:

$$W = W_{\Sigma F_2} + W_{\Sigma F_3} \text{ ή } \boxed{W = -1600\text{ J}}.$$

ΘΕΜΑ Α

Σε ένα κιβώτιο μάζας $m = 10 \text{ kg}$, το οποίο αρχικά ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο δάπεδο, αρχίζει τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ να ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 60 N . Η δύναμη παύει να ασκείται τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$, κατά την οποία η ταχύτητα του κιβωτίου είναι $v_1 = 20 \text{ m/s}$. Στη συνέχεια το κιβώτιο ολισθαίνει στο δάπεδο μέχρι να σταματήσει.

Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και ότι η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Να υπολογίσετε:

Α1) την επιτάχυνση του κιβωτίου στο χρονικό διάστημα από $t_0 = 0 \text{ s}$ έως $t_1 = 5 \text{ s}$.

Μονάδες 4

Α2) το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του κιβωτίου και του δαπέδου.

Μονάδες 7

Α3) το έργο της δύναμης $\vec{F}$ στο χρονικό διάστημα από $t_0 = 0$ έως $t_1 = 5 \text{ s}$.

Μονάδες 7

Α4) τη συνολική μετατόπιση του κιβωτίου πάνω στο δάπεδο.

Μονάδες 7

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Η επιτάχυνση του κιβωτίου είναι :

$$\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \boxed{\alpha = 4 \frac{m}{s^2}}$$

Δ2) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s.

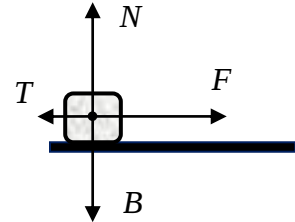
Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F_x = ma \quad \text{ή} \quad F - T = ma \quad (1)$$

$$\text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N = B \quad (2)$$

$$\text{Αλλά } T = \mu N \stackrel{(2)}{\Rightarrow} T = \mu B \quad \text{ή} \quad T = \mu mg \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε τελικά $\boxed{\mu = 0,2}$



Δ3) Από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s το κιβώτιο μετατοπίστηκε κατά

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 \quad \text{ή} \quad \boxed{\Delta x_1 = +50 \text{ m}}$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι:

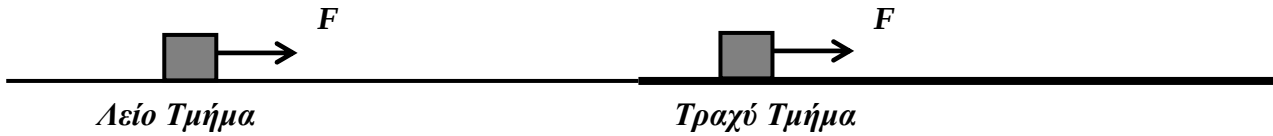
$$W_F = F \cdot \Delta x_1 \quad \text{ή} \quad W_F = 3000 \text{ J}$$

Δ4) Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από την αρχική θέση έως τη τελική θέση έχουμε:

$$K_{\text{τελική}} - K_{\text{αρχική}} = W_F - W_T \quad \text{ή} \quad 0 - 0 = W_F - T \cdot \Delta x_{\text{ολικο}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\Delta x_{\text{ολικο}} = 150 \text{ m}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Κιβώτιο μάζας $m = 2 \text{ kg}$ αρχικά ηρεμεί σε λείο οριζόντιο δρόμο. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$, ασκείται στο κιβώτιο σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $\vec{F} = 4 \text{ N}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Να υπολογίσετε:

Δ1) το διάστημα που διανύει το κιβώτιο από τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$.

Μονάδες 7

Τη χρονική στιγμή t_1 και χωρίς να καταργηθεί η δύναμη $\vec{F}$, το κιβώτιο εισέρχεται με την ταχύτητα που έχει εκείνη τη στιγμή σε ένα τραχύ τμήμα του δρόμου με το οποίο εμφανίζει τριβή ολίσθησης, με αποτέλεσμα να κινείται τώρα ευθύγραμμα και ομαλά.

Να υπολογίσετε:

Δ2) το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του κιβωτίου και του δρόμου,

Μονάδες 8

Δ3) το έργο της δύναμης $\vec{F}$ καθώς κατά τη διάρκεια του 7^{ου} δευτερολέπτου της κίνησης του κιβωτίου.

Μονάδες 5

Δ4) τη θερμότητα που μεταφέρεται κατά τη διάρκεια του 7^{ου} δευτερολέπτου της κίνησης του κιβωτίου.

Μονάδες 5

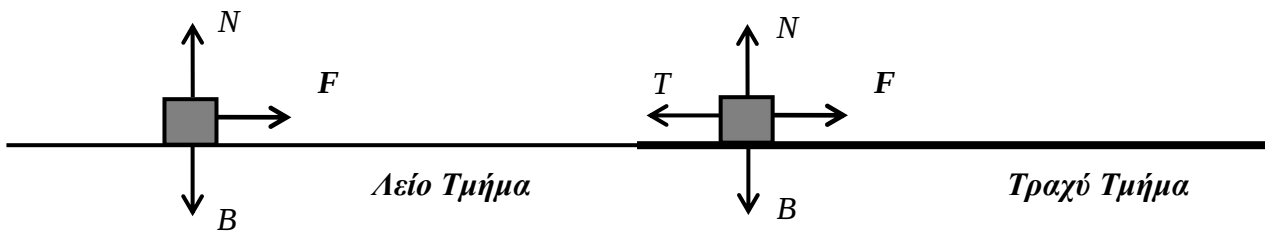
Ενδεικτική Λύση

Δ1) Στο λείο τμήμα, από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$\Sigma F = ma \quad \text{ή} \quad F = ma \quad \text{και τελικά} \quad a = 2 \frac{m}{s^2}$$

Το διάστημα είναι ίσο με τη μετατόπιση του κιβωτίου:

$$S = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{ή} \quad S = 25 \text{ m}$$



Δ2) Στο τραχύ τμήμα, από το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$\Sigma F_x = ma \quad \text{ή} \quad F - T = 0 \quad (1)$$

$$\text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N = B \quad (2)$$

Αλλά

$$T = \mu N \stackrel{(2)}{\Rightarrow} T = \mu B \quad \text{ή} \quad T = \mu mg \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε τελικά

$$\mu = 0,2$$

Δ3) Το κιβώτιο στο τραχύ τμήμα της διαδρομής του κινείται με σταθερή ταχύτητα. Η ταχύτητα αυτή είναι ίση με την ταχύτητα στο τέλος της διαδρομής του στο λείο τμήμα, δηλαδή

$$v = a\Delta t \quad \text{ή} \quad v = 10 \frac{m}{s}$$

Κατά τη διάρκεια του 7^{ου} δευτερολέπτου της κίνησης, το κιβώτιο μετατοπίστηκε κατά

$$\Delta x = v\Delta t \quad \text{ή} \quad \Delta x = 10 \text{ m} \quad (4)$$

και το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι:

$$W_F = F\Delta x \quad \text{ή} \quad W_F = 40 \text{ J}$$

Δ4) Η θερμότητα που μεταφέρεται είναι αριθμητικά ίση με το έργο της τριβής.

$$Q = |W_T|.$$

Επειδή $v = \text{σταθ}$ και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1) έχουμε τελικά

$$Q = W_F = 40 \text{ J}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Σώμα μάζας 5 kg βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ s στο σώμα ασκούνται δυο σταθερές οριζόντιες δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, οι διευθύνσεις των οποίων είναι κάθετες μεταξύ τους, και τα μέτρα τους συνδέονται με τη σχέση $F_1 = \frac{3}{4}F_2$. Το σώμα αρχίζει να κινείται πάνω στο οριζόντιο δάπεδο και τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s, το μέτρο της ταχύτητας του ισούται με 8 m/s.

Να υπολογίσετε:

Δ1) το μέτρο της συνισταμένης των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$,

Μονάδες 8

Δ2) τα μέτρα των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$,

Μονάδες 5

Δ3) την κινητική ενέργεια του σώματος, τη χρονική στιγμή που η μετατόπιση του είναι $\Delta x = 4$ m, από το σημείο που ξεκίνησε.

Μονάδες 6

Δ4) το έργο της δύναμης $\vec{F}_1$ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ s μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s.

Μονάδες 6

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα στην διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης, επομένως

$$v_1 = a \cdot \Delta t_1 \quad \text{ή} \quad v_1 = a \cdot t_1$$

και τελικά

$$\boxed{a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$\Sigma F = ma \quad \text{ή} \quad \boxed{\Sigma F = 10 \text{ N}}$$

Δ2) Έχουμε $\Sigma F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ και $F_1 = \frac{3}{4} F_2$

Επιλύοντας το σύστημα έχουμε τελικά:

$$F_1 = 6 \text{ N} \quad \text{και} \quad F_2 = 8 \text{ N}$$

Δ3) Έχουμε $\Delta x_2 = \frac{1}{2} a \cdot (\Delta t_2)^2$ και τελικά $\boxed{\Delta t_2 = 2 \text{ s}}$

Άρα

$$v_2 = a \cdot \Delta t_2 \quad \text{ή} \quad v_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{και}$$

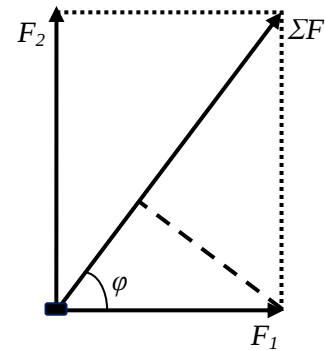
$$K = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 \quad \text{ή} \quad \boxed{K = 40 \text{ J}}$$

Δ4) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ το σώμα έχει μετατοπισθεί κατά

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a \cdot (\Delta t_1)^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x_1 = 16 \text{ m}$$

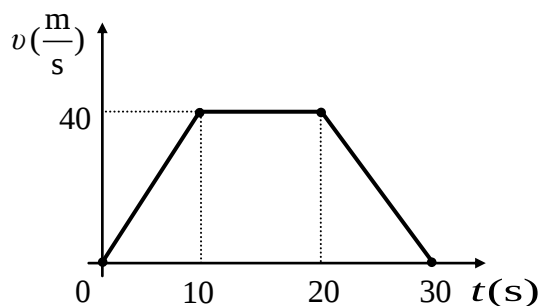
Το έργο της δύναμης F_1 είναι:

$$W_{F_1} = F_1 \cdot \Delta x_1 \cdot \cos \varphi \quad \text{ή} \quad W_{F_1} = 6 \cdot 16 \cdot 0,6 \quad \text{ή} \quad \boxed{W_{F_1} = 57,6 \text{ J}}$$



ΘΕΜΑ Δ

Μικρό σώμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ με αποτέλεσμα το σώμα να αρχίσει να κινείται και η τιμή της ταχύτητάς του μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του επιπέδου είναι $\mu = 0,1$.



Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Για το χρονικό διάστημα από $0 \text{ s} \rightarrow 30 \text{ s}$:

Δ1) να χαρακτηρίσετε μία προς μία τις επιμέρους κινήσεις που εκτελεί το σώμα.

Μονάδες 3

Δ2) να προσδιορίσετε την τιμή της επιτάχυνσης του σώματος στις κινήσεις όπου η ταχύτητα του μεταβάλλεται και να σχεδιάσετε σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων το διάγραμμα της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο.

Μονάδες 9

Δ3) να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα της αλγεβρικής τιμής της δύναμης $\vec{F}$ σε συνάρτηση με το χρόνο.

Μονάδες 7

Δ4) να υπολογίσετε το έργο της τριβής ολίσθησης.

Μονάδες 6

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Χρονικό διάστημα $0\text{ s} \rightarrow 10\text{ s}$: Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με μηδενική αρχική ταχύτητα.

Χρονικό διάστημα $10\text{ s} \rightarrow 20\text{ s}$: Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

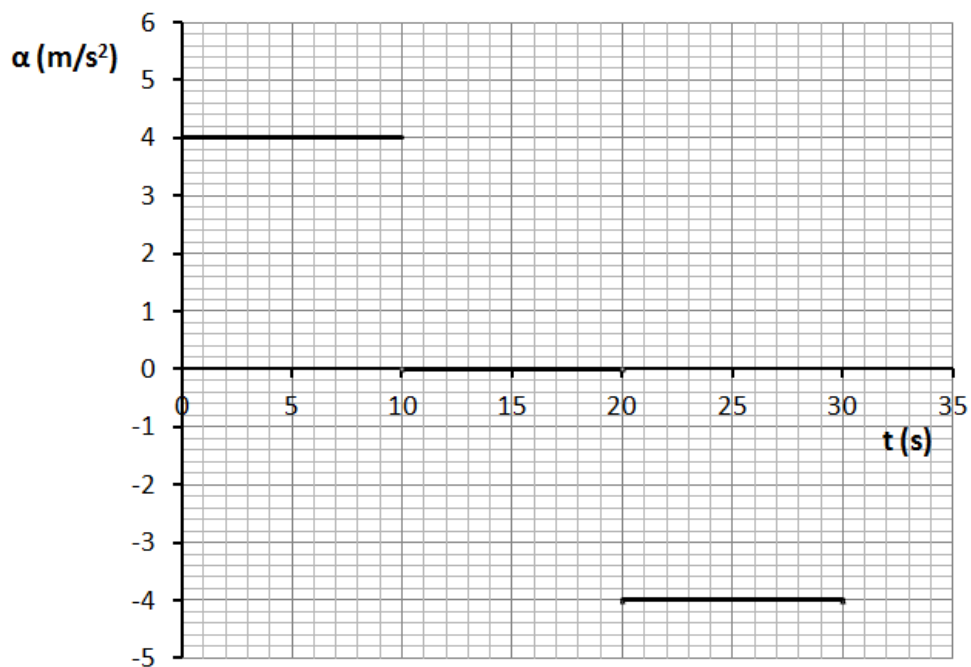
Χρονικό διάστημα $10\text{ s} \rightarrow 20\text{ s}$: Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Δ2) Γενικά η κλίση της ευθείας στο διάγραμμα της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνει την επιτάχυνση, οπότε:

Χρονικό διάστημα $0\text{ s} \rightarrow 10\text{ s}$: $\alpha_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1}$ ή $\alpha_1 = \frac{+40 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10\text{ s}}$ και τελικά $\alpha_1 = +4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Χρονικό διάστημα $10\text{ s} \rightarrow 20\text{ s}$: $\alpha_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2}$ ή $\alpha_2 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

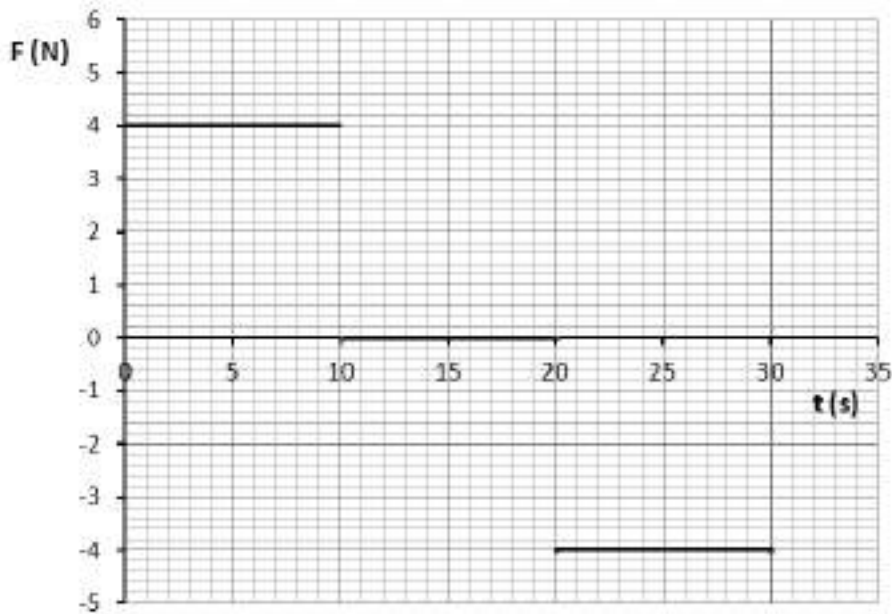
Χρονικό διάστημα $10\text{ s} \rightarrow 20\text{ s}$: $\alpha_3 = \frac{\Delta v_3}{\Delta t_3}$ ή $\alpha_3 = \frac{-40 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10\text{ s}}$ και τελικά $\alpha_3 = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$



Δ3) Χρονικό διάστημα $0\text{ s} \rightarrow 10\text{ s}$: $F-T = m\alpha_1$ ή $F_1 = 5\text{ N}$

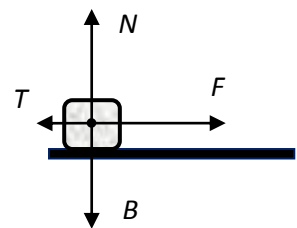
Χρονικό διάστημα $10\text{ s} \rightarrow 20\text{ s}$: $F-T = 0\text{ N}$ ή $F_2 = 1\text{ N}$

Χρονικό διάστημα $10\text{ s} \rightarrow 20\text{ s}$: $F-T = m\alpha_3$ ή $F_1 = -3\text{ N}$



Δ4) Το εμβαδόν του τραpezιού που περικλείεται μεταξύ της γραμμής που παριστά την ταχύτητα και των αξόνων v , t είναι ίσο με τη μετατόπιση του οχήματος.

Επομένως: $\Delta x = \frac{30+10}{2} \cdot 40 \text{ (SI)}$ ή $\boxed{\Delta x = 800 \text{ m}}$



Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\text{και } \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N = B \quad (1)$$

$$\text{Αλλά } T = \mu \cdot N \stackrel{(1)}{\Rightarrow} T = \mu \cdot B \quad \text{ή} \quad T = \mu \cdot m \cdot g \quad \text{ή} \quad \boxed{T = 1 \text{ N}}$$

Το έργο της δύναμης T είναι:

$$W_T = T \cdot \Delta x \cdot \cos \varphi \quad \text{ή} \quad W_T = 1 \cdot 800 \cdot (-1) \quad \text{ή} \quad \boxed{W_T = -800 \text{ J}}$$

ΘΕΜΑ Α

Μικρό σώμα μάζας $m = 400 \text{ g}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,25$. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ ασκείται στο σώμα οριζόντια σταθερή δύναμη $\vec{F}$ μέτρου ίσου με 5 N , μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$, όπου καταργείται.

Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και ότι η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Για το χρονικό διάστημα που ασκείται η δύναμη:

Δ1) να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το σώμα.

Μονάδες 7

Δ2) να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου ($v-t$).

Μονάδες 5

Δ3) να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}$.

Μονάδες 6

Δ4) να υπολογίσετε το μέσο ρυθμό με τον οποίο η προσφερόμενη στο σώμα ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική.

Μονάδες 7

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s.

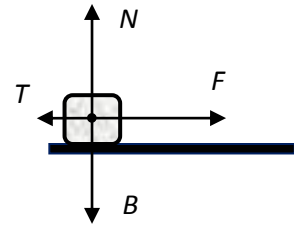
Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F_x = ma \quad \text{ή} \quad F - T = ma \quad (1)$$

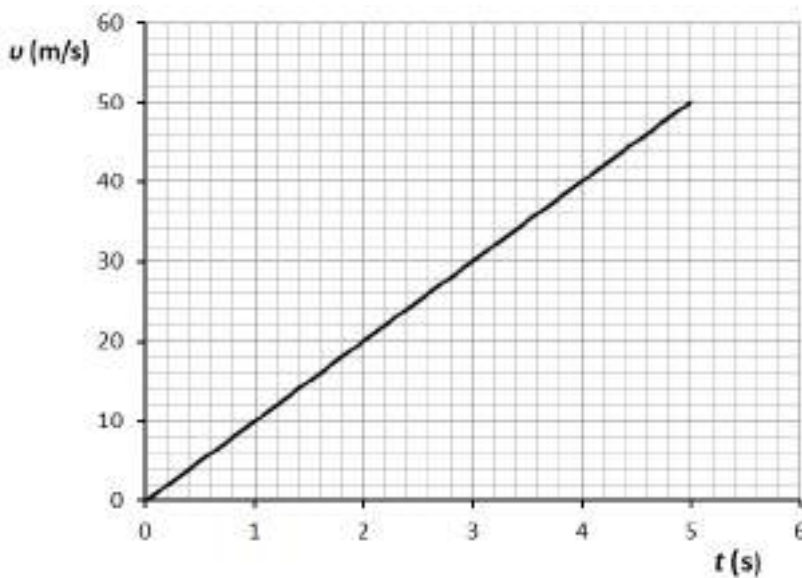
$$\text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N = B \quad (2)$$

$$\text{Αλλά } T = \mu N \stackrel{(2)}{\Rightarrow} T = \mu B \quad \text{ή} \quad T = \mu mg \quad \text{ή} \quad T = 1 \text{ N} \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε τελικά $a = 10 \frac{m}{s^2}$



Δ2)



Δ3) Από το προηγούμενο διάγραμμα η μετατόπιση του σώματος είναι:

$$\Delta x = \frac{50 \cdot 5}{2} = 125 \text{ m.}$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι:

$$W_F = F \cdot \Delta x = 625 \text{ J.}$$

Δ4) Ενέργεια από το σώμα μετατρέπεται σε θερμότητα μέσω του έργου της τριβής.

Επομένως

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{|W_T|}{\Delta t} \quad \eta \quad \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{|-1 \cdot 125|}{5} \quad \eta \quad \frac{\Delta Q}{\Delta t} = 25 \frac{J}{s}$$

ΘΕΜΑ Δ

Ένα μικρό σώμα μάζας 2 kg βρίσκεται αρχικά ακίνητο πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ s ασκείται στο σώμα σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$. Η δύναμη ασκείται στο σώμα μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s οπότε εκείνη τη στιγμή έχει αποκτήσει ταχύτητα μέτρου $v_1 = 20 \frac{m}{s}$.

Τη χρονική στιγμή t_1 η δύναμη καταργείται και το σώμα επιβραδύνεται ομαλά μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 12$ s που η ταχύτητά του μηδενίζεται.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

Να υπολογίσετε:

Δ1) την επιβράδυνση που προκαλεί η τριβή στο χρονικό διάστημα $t_1 \rightarrow t_2$.

Μονάδες 5

Δ2) το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και δαπέδου.

Μονάδες 6

Δ3) το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

Μονάδες 7

Δ4) το έργο της τριβής από τη χρονική στιγμή $t = 0$ s, μέχρι τη χρονική στιγμή που σταματά το σώμα.

Μονάδες 7

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Στο χρονικό διάστημα $t_1 \rightarrow t_2$ το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, οπότε:

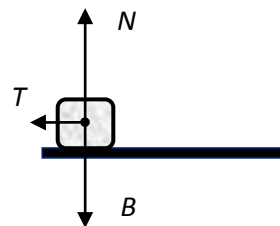
$$v = v_1 - |\alpha|\Delta t \Rightarrow 0 = v_1 - |\alpha|(t_2 - t_1) \text{ και τελικά } |\alpha| = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Δ2) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα από τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ έως τη χρονική στιγμή $t_2 = 12 \text{ s}$.

Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε για τα μέτρα των δυνάμεων έχουμε:

$$\Sigma F_x = ma \text{ ή } T = ma \text{ ή } T = 5 \text{ N} \quad (1)$$

$$\text{και } \Sigma F_y = 0 \text{ ή } N = B \quad (2)$$



Αλλά

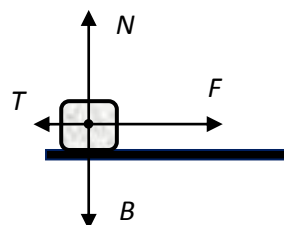
$$T = \mu N \stackrel{(2)}{\Rightarrow} T = \mu B \text{ ή } T = \mu mg \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε τελικά $\mu = 0,25$

Δ3) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα από τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$.

Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε για τα μέτρα των δυνάμεων έχουμε:

$$\Sigma F_x = ma' \text{ ή } F - T = ma' \text{ όπου } a' = \frac{v_1}{t_1} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



και τελικά $F = T + ma' \text{ ή λόγω της σχέσης (1) } F = 15 \text{ N}$

Δ4) α' τρόπος

Έχουμε $\Delta x_1 = \frac{1}{2} a' t_1^2 \text{ ή } \Delta x_1 = 40 \text{ m}$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τη συνολική μετατόπιση του σώματος έχουμε:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_F + W_T \text{ ή } 0 - 0 = F \cdot \Delta x_1 + W_T \text{ ή } W_T = -600 \text{ J}$$

β' τρόπος

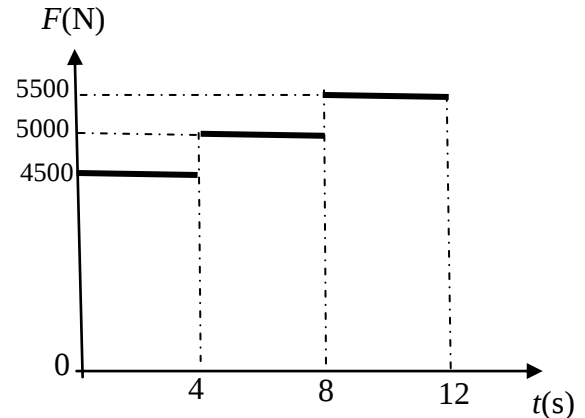
Η συνολική μετατόπιση του σώματος είναι $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$

$$\text{με } \Delta x_2 = v_1 \Delta t - \frac{1}{2} \alpha (\Delta t)^2 \text{ ή } \Delta x_2 = v_1 (t_2 - t_1) - \frac{1}{2} \alpha (t_2 - t_1)^2 \text{ ή } \Delta x_2 = 80 \text{ m}$$

$$W_T = -T \cdot \Delta x \text{ ή } W_T = -T \cdot (\Delta x_1 + \Delta x_2) \text{ και τελικά } W_T = -600 \text{ J}$$

ΘΕΜΑ Α

Ο θάλαμος ανελκυστήρα μάζας $m = 500 \text{ kg}$ είναι αρχικά ακίνητος και ξεκινώντας τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ κατεβαίνει σε χρονικό διάστημα 12 s από τον τελευταίο όροφο στο ισόγειο ενός πολυώροφου κτιρίου. Στο θάλαμο εκτός από το βάρος του ασκείται, μέσω ενός συρματόσχοινου, μία κατακόρυφη προς τα πάνω δύναμη $\vec{F}$. Η τιμή της $\vec{F}$ σε συνάρτηση με το χρόνο καθόδου παριστάνεται στο διπλανό διάγραμμα.



Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

Δ1) Να χαρακτηρίσετε τις κινήσεις που εκτελεί ο θάλαμος και να υπολογίσετε την τιμή της επιτάχυνσής του σε κάθε μία από αυτές.

Μονάδες 6

Δ2) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του θαλάμου τις χρονικές στιγμές 4s , 8s και 12s .

Μονάδες 6

Δ3) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα της ταχύτητας του θαλάμου συναρτήσει του χρόνου και να υπολογίσετε το ολικό μήκος της διαδρομής που έκανε ο ανελκυστήρας κατά την κάθοδό του.

Μονάδες 8

Δ4) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}$ και τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του θαλάμου στο χρονικό διάστημα από τη χρονική στιγμή 4s έως τη χρονική στιγμή 8s .

Μονάδες 5

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το βάρος του θαλάμου είναι:

$$B = m \cdot g \text{ ή } B = 5000 \text{ N.}$$

Χρονικό διάστημα $0 \text{ s} \rightarrow 4 \text{ s}$:

$$\Sigma F_1 = B - F_1 \text{ ή } \boxed{\Sigma F_1 = 500 \text{ N}}$$

Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με μηδενική αρχική ταχύτητα.

Χρονικό διάστημα $4 \text{ s} \rightarrow 8 \text{ s}$: $\Sigma F_2 = B - F_2 \text{ ή } \boxed{\Sigma F_2 = 0 \text{ N}}$

Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Χρονικό διάστημα $8 \text{ s} \rightarrow 12 \text{ s}$: $\Sigma F_3 = B - F_3 \text{ ή } \boxed{\Sigma F_3 = -500 \text{ N}}$

Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

Χρονικό διάστημα $0 \text{ s} \rightarrow 4 \text{ s}$: $\alpha_1 = \frac{\Sigma F_1}{m} \text{ ή } \boxed{\alpha_1 = +1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$

Χρονικό διάστημα $4 \text{ s} \rightarrow 8 \text{ s}$: $\alpha_2 = \frac{\Sigma F_2}{m} \text{ ή } \boxed{\alpha_2 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$

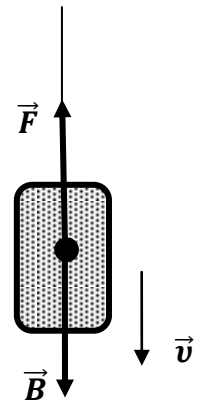
Χρονικό διάστημα $8 \text{ s} \rightarrow 12 \text{ s}$: $\alpha_3 = \frac{\Sigma F_3}{m} \text{ ή } \boxed{\alpha_3 = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$

Δ2) Για τις ταχύτητες έχουμε

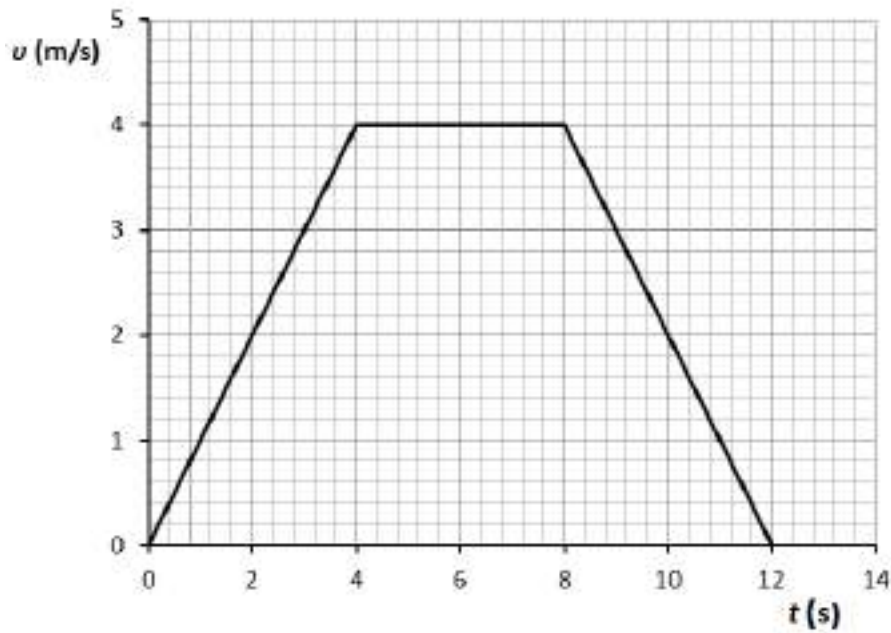
Χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$: $v_1 = \alpha_1 t \text{ ή } \boxed{v_1 = +4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$

Χρονική στιγμή $t_2 = 8 \text{ s}$: $\boxed{v_2 = +4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$

Χρονική στιγμή: $t_3 = 12 \text{ s}$: $v_3 = v_2 - |\alpha_3| \cdot t \text{ ή } \boxed{v_3 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$



Δ3)



Το ολικό μήκος της διαδρομής είναι ίσο με το εμβαδό του τραπεζίου :

$$\Delta x = E \quad \text{ή} \quad \Delta x = 32 \text{ m.}$$

Δ4) Η μετατόπιση του θαλάμου από τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ έως τη χρονική στιγμή $t_2 = 8 \text{ s}$ είναι:

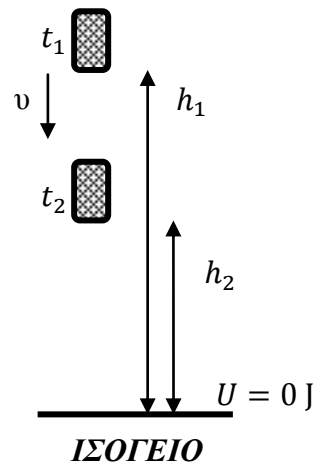
$$\Delta x_2 = v_2 \cdot (t_2 - t_1) \quad \text{ή} \quad \boxed{\Delta x_2 = +16 \text{ m}}$$

και το έργο της δύναμης F_2 είναι:

$$W_{F_2} = F_2 \Delta x_2 \sin \varphi \quad \text{ή} \quad W_{F_2} = 5000 \cdot 16 \cdot (-1) \quad \text{ή} \quad W_{F_2} = -80.000 \text{ J}$$

Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του θαλάμου στο ίδιο χρονικό διάστημα είναι:

$$\Delta U = m \cdot g \cdot (h_2 - h_1) \quad \text{ή} \quad \Delta U = 5000 \cdot (-16) = \text{ή} \quad \boxed{\Delta U = -80.000 \text{ J}}$$



ΘΕΜΑ Α

Ένα αυτοκίνητο μάζας 1000 Kg κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα μέτρου $v = 72 \frac{Km}{h}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ s ο οδηγός φρενάρει οπότε το αυτοκίνητο κινείται με σταθερή επιβράδυνση και ακινητοποιείται τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s.

Να υπολογίσετε

Δ1) την επιβράδυνση του αυτοκινήτου.

Μονάδες 6

Δ2) την κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου την χρονική στιγμή $t = 2$ s.

Μονάδες 6

Δ3) τη δύναμη που επιβραδύνει το αυτοκίνητο.

Μονάδες 6

Δ4) Αν S είναι το διάστημα που διανύει το αυτοκίνητο μέχρι να σταματήσει όταν έχει αρχική ταχύτητα $v = 72 \frac{Km}{h}$ και S' το διάστημα που διανύει το αυτοκίνητο μέχρι να σταματήσει αν είχε αρχική ταχύτητα $v' = 36 \frac{Km}{h}$ να αποδείξετε ότι $S = 4S'$.

Να θεωρήσετε ότι η δύναμη που επιβραδύνει το αυτοκίνητο είναι ίδια και στις δυο περιπτώσεις.

Μονάδες 7

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Για τη ταχύτητα του αυτοκινήτου ισχύει

$$v = v_0 - \alpha \cdot \Delta t \Rightarrow 0 = v_0 - \alpha \cdot t_1 \Rightarrow \alpha = \frac{v_0}{t_1} \text{ και τελικά } \alpha = 5 \frac{m}{s^2}$$

$$\left(v_0 = 72 \frac{Km}{h} = 72 \frac{1000 m}{3600 s} = 20 \frac{m}{s} \right)$$

Δ2) Από τη σχέση $v = v_0 - \alpha \cdot \Delta t$ για $\Delta t = 2s$ έχουμε $v = 10 \frac{m}{s}$ και

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \text{ ή } K = 50.000 \text{ J}$$

Δ3) Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα το μέτρο της συνισταμένης δύναμης είναι:

$$\Sigma F = m \cdot a \text{ ή } F = 5.000 \text{ N}$$

Δ4) Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τη συνολική μετατόπιση του σώματος και στις δύο περιπτώσεις έχουμε:

$$K_{τελικη} - K_{αρχικη} = \Sigma W_F \text{ ή } 0 - \frac{1}{2}mv^2 = F \cdot S \quad (1)$$

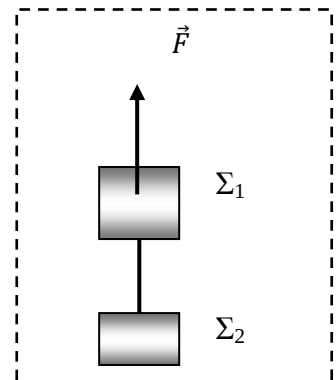
$$K'_{τελικη} - K'_{αρχικη} = \Sigma W_F \text{ ή } 0 - \frac{1}{2}mv'^2 = F \cdot S' \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε

$$\frac{v^2}{v'^2} = \frac{S}{S'} \text{ ή } \left(\frac{v}{v'} \right)^2 = \frac{S}{S'} \text{ ή } \left(\frac{72}{36} \right)^2 = \frac{S}{S'} \text{ και τελικά } S = 4S'$$

ΘΕΜΑ Α

Τα σώματα του σχήματος Σ_1 και Σ_2 έχουν μάζες $m_1 = 4 \text{ kg}$ και $m_2 = 2 \text{ kg}$ αντίστοιχα και συνδέονται με αβαρές και μη εκτατό νήμα. Στο Σ_1 ασκείται σταθερή κατακόρυφη δύναμη με μέτρο $F = 90 \text{ N}$ και το σύστημα των σωμάτων, τη χρονική στιγμή $t = 0$, αρχίζει να ανεβαίνει κατακόρυφα, με το νήμα τεντωμένο. Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίση με $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και ότι η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα..



Δ1) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα και να εφαρμόσετε για το καθένα το 2ο νόμο του Newton.

Μονάδες 6

Δ2) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση των σωμάτων.

Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογίσετε το συνολικό έργο των βαρών των σωμάτων όταν αυτά έχουν ανυψωθεί κατά $h = 10 \text{ m}$ πάνω από την αρχική τους θέση.

Μονάδες 7

Δ4) Να υπολογίσετε τη συνολική κινητική ενέργεια των σωμάτων όταν αυτά έχουν ανυψωθεί κατά $h = 10 \text{ m}$ πάνω από την αρχική τους θέση.

Μονάδες 6

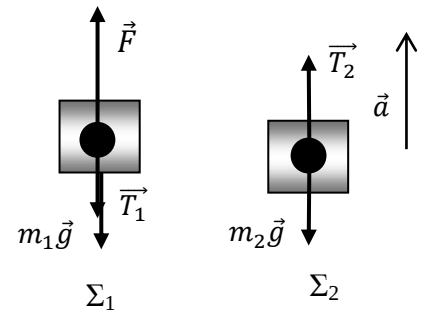
Ενδεικτική Λύση

Δ1) Επειδή τα σώματα συνδέονται με μη εκτατό και τεντωμένο νήμα έχουν την ίδια επιτάχυνση $\vec{a}$.

Εφαρμόζουμε το 2^ο νόμο του Newton για κάθε σώμα ξεχωριστά θεωρώντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης.

$$\Sigma_1: F - m_1 \cdot g - T_1 = m_1 \cdot a \quad (1)$$

$$\Sigma_2: T_2 - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a \quad (2)$$



Δ2) Επειδή τα σώματα συνδέονται με αβαρές και τεντωμένο νήμα ισχύει:

$$T_1 = T_2 \text{ (μέτρα).}$$

Εφαρμόζουμε το 2^ο νόμο του Newton για το σύστημα των δύο σωμάτων θεωρώντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης:

$$F - m_1 \cdot g - T_1 + T_2 - m_2 \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a \quad \text{ή} \quad 90 - 40 - 20 = 6a \quad \text{ή} \quad \boxed{a = 5 \frac{m}{s^2}}.$$

Δ3)

$$W_{o\lambda} = W_{w_1} + W_{w_2} \quad \text{ή} \quad W_{o\lambda} = -m_1 \cdot g \cdot h - m_2 \cdot g \cdot h \quad \text{ή} \quad \boxed{W_{o\lambda} = -600J}$$

Δ4) Το σύστημα των σωμάτων εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζουμε το χρόνο κίνησης για μετατόπιση, $\Delta y = h = 10m$:

$$\Delta y = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{ή} \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta y}{a}} \quad \text{ή} \quad \boxed{t = 2s}$$

Και από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζουμε το μέτρο της όταν τα σώματα έχουν μετατοπιστεί (ανυψωθεί) κατά 10 m:

$$v = a \cdot t \quad \text{ή} \quad v = 10 \frac{m}{s}.$$

$$\text{Άρα, } K_{o\lambda} = K_1 + K_2 \quad \text{ή} \quad K_{o\lambda} = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 \quad \text{ή} \quad \boxed{K_{o\lambda} = 300J}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Μικρός μεταλλικός κύβος, αφήνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$, από ύψος $h = 30 \text{ m}$ πάνω από το έδαφος ενώ ταυτόχρονα αρχίζει να ασκείται στον κύβο σταθερή κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$, με μέτρο 20 N και κατεύθυνση προς το έδαφος. Ο κύβος φθάνει στο έδαφος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$.

Η επιτάχυνση της βαρύτητας στη διάρκεια της κίνησης είναι σταθερή και ίση με $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Θεωρήστε ως επίπεδο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια το έδαφος, καθώς και την αντίσταση του αέρα αμελητέα.

Να υπολογίσετε:

Δ1) την επιτάχυνση του κύβου,

Μονάδες 6

Δ2) τη μάζα του κύβου,

Μονάδες 6

Δ3) την κινητική ενέργεια του κύβου τη χρονική στιγμή που φθάνει στο έδαφος,

Μονάδες 6

Δ4) το λόγο της κινητικής ενέργειας K προς τη βαρυτική δυναμική ενέργεια U του κύβου τη χρονική στιγμή που απέχει 18 m από το έδαφος.

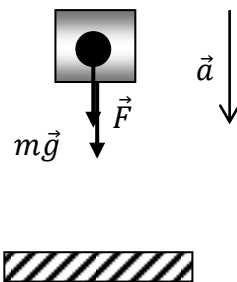
Μονάδες 7

Ενδεικτική λύση

Δ1) Ο κύβος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα. Η τιμή της επιτάχυνσης υπολογίζεται από την εξίσωση κίνησης για $t_1 = 2s$ και $\Delta y = h = 30m$:

$$\Delta y = \frac{1}{2}at_1^2 \quad \text{ή} \quad \boxed{a = 15 \frac{m}{s^2}},$$

και κατεύθυνση αυτή του σχήματος.



Δ2) Εφαρμόζουμε το 2^ο νόμο του Newton για τον κύβο θεωρώντας ως θετική τη φορά της επιτάχυνσης.

$$F + m \cdot g = m \cdot a \quad \text{ή} \quad m = \frac{F}{a - g} \quad \text{ή} \quad \boxed{m = 4kg}.$$

Δ3) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας – Έργου (ΘΜΚΕ) για τη μετατόπιση του σώματος από το σημείο εκκίνησης έως το σημείο ακριβώς πριν έρθει σε επαφή με το έδαφος:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_B + W_F \quad \text{ή} \quad K_{τελ} - 0 = +m \cdot g \cdot h + F \cdot h \quad \text{ή} \quad \boxed{K_{τελ} = 1800J}$$

Δ4) Τη χρονική στιγμή που ο κύβος απέχει $y = 18m$ από το έδαφος περικλείει δυναμική ενέργεια ως προς αυτό:

$$U = mgy \quad \text{ή} \quad U = 720J,$$

και έχει μετατοπιστεί ως προς τη θέση εκκίνησης κατά

$$\Delta y' = h - y \quad \text{ή} \quad \Delta y' = 12m.$$

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζουμε το χρόνο κίνησης για μετατόπιση, $\Delta y' = 12m$:

$$\Delta y' = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{ή} \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta y'}{a}} \quad \text{ή} \quad t = \sqrt{1,6}s$$

και από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζουμε το μέτρο της:

$$v = a \cdot t \quad \text{ή} \quad v = 15\sqrt{1,6} \frac{m}{s},$$

Στη συνέχεια για την κινητική ενέργεια του κύβου ισχύει,

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{ή} \quad K = 720J.$$

Άρα,

$$\boxed{\frac{K}{U} = 1}$$

ΘΕΜΑ Δ

Κιβώτιο μάζας 40 kg είναι αρχικά ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να ασκείται στο κιβώτιο σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου, $F_1 = 80\text{ N}$. Τη χρονική στιγμή t_1 , όταν το κιβώτιο έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x_1 = 16\text{ m}$, η δύναμη $\vec{F}_1$ καταργείται και ταυτόχρονα αρχίζει να ασκείται πάνω στο σώμα δύναμη $\vec{F}_2$, αντίρροπη της $\vec{F}_1$, με μέτρο $F_2 = 10\text{ N}$ που έχει ως αποτέλεσμα το κιβώτιο να σταματήσει τη χρονική στιγμή t_2 .

Δ1) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κιβωτίου όταν έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x_1 = 16\text{ m}$ από την αρχική του θέση.

Μονάδες 6

Δ2) Να παραστήσετε γραφικά το μέτρο της ταχύτητας, σε συνάρτηση με το χρόνο σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων για όλη τη χρονική διάρκεια της κίνησης.

Μονάδες 8

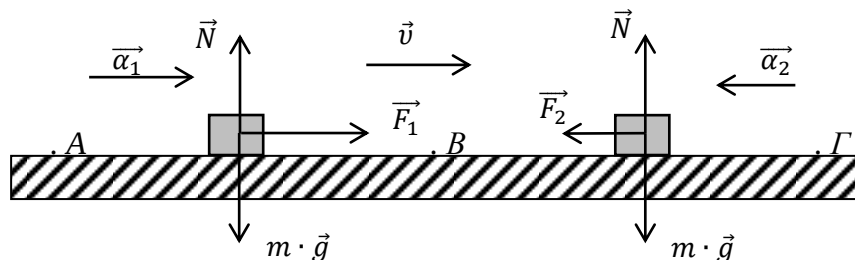
Δ3) Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του κιβωτίου στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow t_2$.

Μονάδες 6

Δ4) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}_2$ στη χρονική διάρκεια $t_1 \rightarrow t_2$.

Μονάδες 5

Ενδεικτική λύση



Δ1) Έστω A, B και Γ οι θέσεις του κιβωτίου τις χρονικές στιγμές $t = 0$, t_1 και t_2 αντίστοιχα και $(AB) = \Delta x_1 = 16m$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας – Έργου (ΘΜΚΕ) για τη μετατόπιση του κιβωτίου από το A στο B, :

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{F_1} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} m v_B^2 - 0 = +F_1 \cdot \Delta x_1 \quad \text{ή} \quad \boxed{v_B = 8 \frac{m}{s}}.$$

Δ2) $0 \rightarrow t_1$: Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα με επιτάχυνση μέτρου a_1 , που υπολογίζεται από την εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Newton λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας :

$$\Sigma F = m \cdot a_1 \quad \text{ή} \quad a_1 = \frac{F_1}{m} \quad \text{ή} \quad a_1 = 2 \frac{m}{s^2}.$$

Από την εξίσωση της επιτάχυνσης μπορεί να προσδιοριστεί η χρονική στιγμή t_1 :

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad a_1 = \frac{v_B - 0}{t_1 - 0} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{v_B}{a_1} \quad \text{ή} \quad t_1 = 4s,$$

Οπότε για την εξίσωση της ταχύτητας ισχύει:

$$v = a_1 \cdot t = 2 \cdot t \quad (S.I), \quad \text{για } 0 \leq t \leq 4s.$$

$t_1 \rightarrow t_2$: Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_B$ και επιβράδυνση $\vec{a}_2$, που η τιμή της υπολογίζεται από την εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Newton λαμβάνοντας ως θετική τη φορά της ταχύτητας :

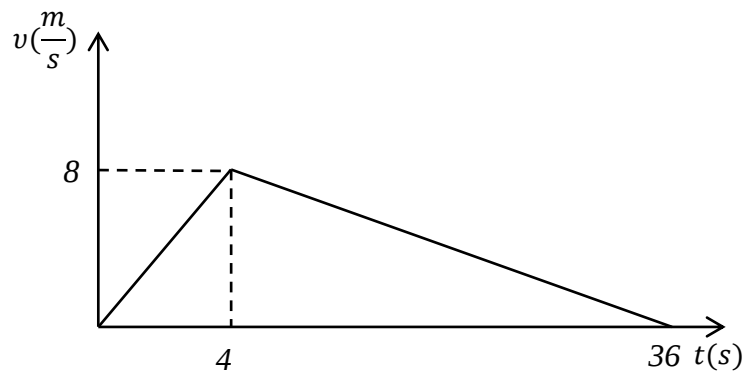
$$\Sigma F = m \cdot a_2 \quad \text{ή} \quad a_2 = \frac{-F_2}{m} \quad \text{ή} \quad a_2 = -0,25 \frac{m}{s^2}.$$

Από την εξίσωση της επιβράδυνσης μπορεί να προσδιοριστεί η χρονική στιγμή t_2 :

$$a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad a_2 = \frac{0 - v_B}{t_2 - t_1} \quad \text{ή} \quad t_2 - t_1 = \frac{-v_B}{a_2} = 32s \quad \text{ή} \quad t_2 = 36s$$

Οπότε για την εξίσωση της ταχύτητας ισχύει:

$$v = v_B + a_2 \cdot t \quad \text{ή} \quad v = 8 - 0,25 \cdot t \quad (S.I), \quad \text{για } 4s \leq t \leq 36s.$$



Δ3) Το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης $v = f(t)$ και του άξονα των χρόνων είναι αριθμητικά ίσο με την μετατόπιση του κινητού, άρα:

$$\Delta x_{ολ} = \frac{36 \cdot 8}{2} \quad \text{ή} \quad \Delta x_{ολ} = 144 \text{ m}.$$

Δ4) Από την εξίσωση μετατόπισης από $t_1 \rightarrow t_2$, με $\Delta t = t_2 - t_1$ ή $\Delta t = 32s$, έχουμε:

$$\Delta x_2 = v_B \Delta t + \frac{1}{2} a_2 \Delta t^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x_2 = 128 \text{ m}$$

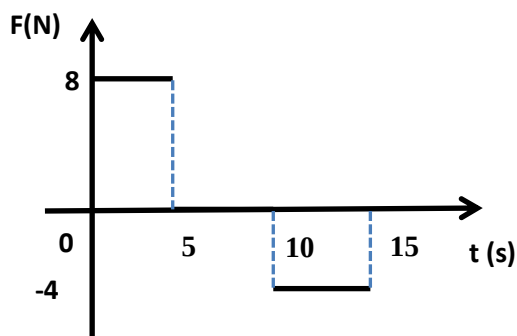
$$\text{και, } W_{F_2} = F_2 \cdot \Delta x_2 \cdot \sin 180^\circ \quad \text{ή} \quad W_{F_2} = -F_2 \cdot \Delta x_2 \quad \text{ή} \quad \boxed{W_{F_2} = -1280J}$$

ΘΕΜΑ Α

Μεταλλικός κύβος μάζας m κινείται ευθύγραμμα πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο έχοντας τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ ταχύτητα μέτρου $4 \frac{m}{s}$. Στον κύβο

ασκείται τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ δύναμη, ίδιας διεύθυνσης με τη ταχύτητα του. Η τιμή της δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο, για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 15 \text{ s}$ φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα. Η αντίσταση του αέρα θεωρείτε αμελητέα. Την χρονική

στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$ ο κύβος έχει αποκτήσει ταχύτητα μέτρου $v = 14 \frac{m}{s}$.



Α1) Να χαρακτηρίσετε τη κίνηση που εκτελεί το σώμα στο χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 5 \text{ s}$ και να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του.

Μονάδες 6

Α2) Να υπολογίσετε τη μάζα του κύβου.

Μονάδες 6

Α3) Να παραστήσετε γραφικά το μέτρο της ταχύτητας του κύβου, σε συνάρτηση με το χρόνο σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 15 \text{ s}$.

Μονάδες 7

Α4) Να υπολογίσετε το έργο της $\vec{F}$ στο χρονικό διάστημα $10 \rightarrow 15 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Ενδεικτική λύση

Δ1) Στο χρονικό διάστημα $0 - 5 \text{ s}$ η δύναμη είναι σταθερή, επομένως, σύμφωνα με τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα $F = m \cdot a$ και η επιτάχυνση a θα είναι σταθερή.

Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.

Η επιτάχυνση θα έχει μέτρο:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 2 \text{ m/s}^2.$$

Δ2) Από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα:

$$m = \frac{F}{a} = 4 \text{ kg}.$$

Δ3) 0-5 s: Κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.

Όταν $t = 5 \text{ s}$ η ταχύτητα είναι:

$$v_1 = 14 \text{ m/s}.$$

5-10 s: Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με:

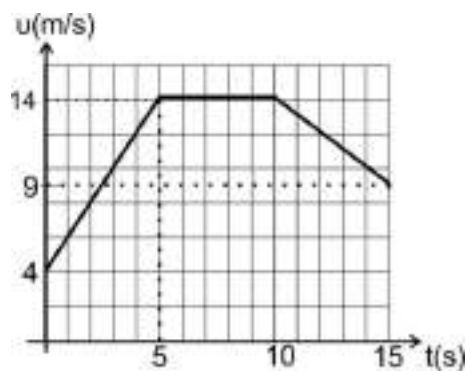
$$v_2 = v_1 = 14 \text{ m/s}.$$

10-15 s: Κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη με:

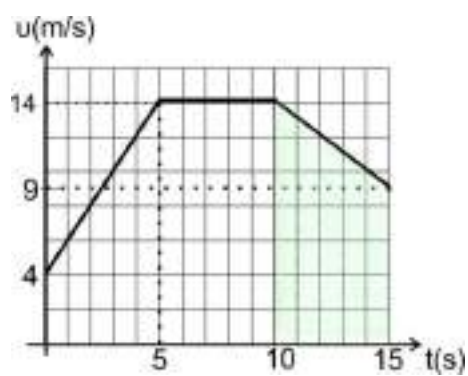
$$|a'| = \frac{|F|}{m} = 1 \text{ m/s}^2.$$

Όταν $t = 15 \text{ s}$ η ταχύτητα είναι:

$$v_3 = v_2 - |a'| \Delta t = 9 \text{ m/s}.$$



Δ4) Στο χρονικό διάστημα 10-15s η μετατόπιση υπολογίζεται από το εμβαδό του αντίστοιχου τραπεζίου:



$$\Delta x = \frac{(14 + 9)}{2} \cdot 5 \text{ m} \quad \text{ή} \quad \Delta x = 57,5 \text{ m}$$

Το έργο είναι:

$$W = F \cdot \Delta x = -230 \text{ J.}$$

ΘΕΜΑ Α

Ένα αυτοκίνητο μάζας $m = 1000 \text{ Kg}$ είναι σταματημένο σε ένα φανάρι Φ1, οριζόντιου δρόμου, που είναι κόκκινο. Τη στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ που ανάβει το πράσινο, ο οδηγός πατάει το γκάζι, οπότε το αυτοκίνητο κινείται με σταθερή επιτάχυνση, με αποτέλεσμα την χρονική στιγμή $t_2 = 4 \text{ s}$ να έχει ταχύτητα μέτρου $v_2 = 10 \text{ m/s}$. Στη συνέχεια συνεχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα μέχρι να φτάσει στο επόμενο φανάρι Φ2 που απέχει $d = 500 \text{ m}$ από το προηγούμενο.

Να υπολογίσετε:

Δ1) Τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο αυτοκίνητο κατά την επιταχυνόμενη κίνησή του.

Μονάδες 6

Δ2) Την απόσταση του αυτοκίνητου από το δεύτερο φανάρι Φ2 τη χρονική t_2 .

Μονάδες 6

Δ3) Τη χρονική στιγμή που το αυτοκίνητο φτάνει στο δεύτερο φανάρι Φ2.

Μονάδες 6

Δ4) Το έργο της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται στο αυτοκίνητο στο χρονικό διάστημα $t_1 \rightarrow t_2$, όπου t_1 είναι μια χρονική στιγμή πριν τη στιγμή t_2 , κατά την οποία το αυτοκίνητο κινούνταν με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Μονάδες 7

Ενδεικτική λύση

Δ1) Η επιτάχυνση του αυτοκινήτου είναι:

$$\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \alpha = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα:

$$\Sigma F = m \cdot \alpha \quad \text{ή} \quad \Sigma F = 2500 \text{ N}.$$

Δ2) Από την εκκίνηση του μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 4 \text{ s}$ το αυτοκίνητο έχει μετατόπιση

$$\Delta x = \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x = 20 \text{ m}.$$

Αρα θα απέχει από το φανάρι Φ2 απόσταση:

$$s = d - x = 480 \text{ m}.$$

Δ3) Κατά τη διάρκεια της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης, το αυτοκίνητο μέχρι να φθάσει στο φανάρι Φ2 χρειάζεται χρόνο

$$\Delta t = \frac{s}{v_2} \quad \text{ή} \quad \Delta t = 48 \text{ s}.$$

Επομένως φθάνει στο Φ2 τη χρονική στιγμή:

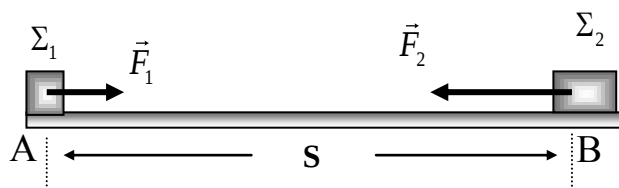
$$t = t_2 + \Delta t \quad \text{ή} \quad t = 52 \text{ s}.$$

Δ4) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας – Έργου βρίσκουμε:

$$\Sigma W = \Delta K \quad \text{ή} \quad \Sigma W = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 \quad \text{ή} \quad \Sigma W = 37500 \text{ J}.$$

ΘΕΜΑ Α

Δύο μεταλλικοί κύβοι Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 5 \text{ kg}$ και $m_2 = 10 \text{ kg}$ κινούνται πάνω σε οριζόντιο δάπεδο κατά μήκος μιας ευθείας ο ένας προς τον άλλο. Τη χρονική στιγμή



$t = 0 \text{ s}$ βρίσκονται στα σημεία A, B του οριζόντιου δαπέδου, έχουν ταχύτητες ίδιας διεύθυνσης και

αντίθετης φοράς μέτρου $v_1 = 5 \frac{m}{s}$ και $v_2 = 5 \frac{m}{s}$ αντίστοιχα και απέχουν μεταξύ τους απόσταση

$S = 200 \text{ m}$. Δυο εργάτες σπρώχνουν τους κύβους Σ_1 και Σ_2 ασκώντας σε αυτούς οριζόντιες δυνάμεις

$\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, όπως παριστάνεται στο σχήμα, με μέτρα $F_1 = 20 \text{ N}$ και $F_2 = 60 \text{ N}$ αντίστοιχα, οι οποίες

έχουν τη διεύθυνση της ευθείας που ορίζουν τα σημεία A, B. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ

δαπέδου και κάθε κύβου είναι $\mu = 0,4$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

Α1) Να σχεδιάσετε τη δύναμη τριβής που δέχεται κάθε κύβος και να υπολογίσετε το μέτρο της.

Μονάδες 6

Α2) Να χαρακτηρίσετε πλήρως το είδος της κίνησης που εκτελεί κάθε κύβος

Μονάδες 6

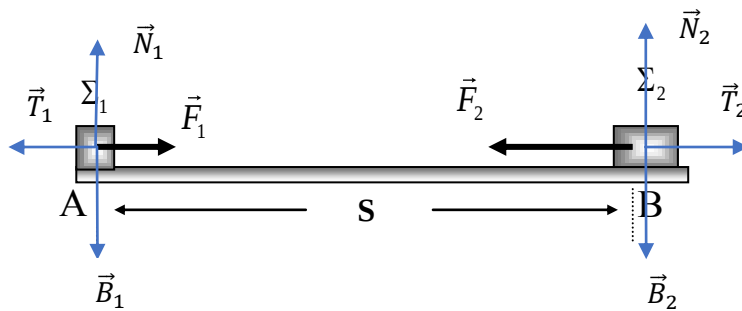
Α3) Να υπολογίσετε την απόσταση από το σημείο A στο οποίο θα συναντηθούν οι δυο κύβοι.

Μονάδες 7

Α4) Να υπολογίσετε τη συνολική ενέργεια που μεταφέρθηκε στον κύβο Σ_1 από τον εργάτη που τον σπρώχνει από την στιγμή $t = 0 \text{ s}$ έως τη στιγμή που οι δυο κύβοι συναντώνται.

Μονάδες 6

Ενδεικτική λύση



Δ1) Λόγω της ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα

Για τον κύβο Σ_1 :

$$\Sigma F_{y1} = 0 \quad \text{ή} \quad N_1 - B_1 = 0 \quad \text{ή} \quad N_1 = m_1 \cdot g$$

$$T_1 = \mu \cdot N_1 = \mu \cdot m_1 \cdot g = 20 \text{ N}$$

Όμοια για τον κύβο Σ_2 :

$$T_2 = \mu \cdot m_2 \cdot g = 40 \text{ N.}$$

Δ2) Κύβος Σ_1 :

Επειδή $\Sigma F_x = F_1 - T_1 = 0$, η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή.

Κύβος Σ_2 :

Επειδή $\Sigma F_x = F_2 - T_2 > 0$ και $\Sigma F_x = \text{σταθ}$,

η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με

$$\alpha = \frac{F_2 - T_2}{m_2} \quad \text{ή} \quad \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Δ3) Οι κύβοι θα συναντηθούν σε ένα σημείο που απέχει απόσταση x από το σημείο Α.

Οι εξισώσεις κίνησης για κάθε κύβο είναι:

Κύβος Σ_1 :

$$x = v_1 \cdot t \quad (1)$$

Κύβος Σ_2 :

$$s - x = v_2 \cdot t - \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε ότι:

$$t = 10 \text{ s και } x = 50 \text{ m.}$$

Δ4) Η ενέργεια μεταφέρθηκε στον κύβο Σ_1 μέσω του έργου της $\vec{F}_1$:

$$W_{F1} = F_1 \cdot x \quad \text{ή} \quad W_{F1} = 1000 \text{ J.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Κύβος μάζας m είναι αρχικά ακίνητος σε οριζόντιο δάπεδο.

Στον κύβο ασκείται οριζόντια σταθερή δύναμη $\vec{F}$ οπότε

αυτός αρχίζει να κινείται στο οριζόντιο δάπεδο. Κατά τη

κίνηση του κύβου ασκείται σε αυτόν τριβή μέτρου $T = 6 \text{ N}$,

ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα. Μετά από μετατόπιση κατά $\Delta x = 4 \text{ m}$ στο

οριζόντιο δάπεδο ο κύβος κινείται με ταχύτητα μέτρου $v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Το έργο της $\vec{F}$ στην παραπάνω

μετατόπιση είναι $W_F = 32 \text{ J}$.

Να υπολογίσετε:

Δ1) το έργο της τριβής στη παραπάνω μετατόπιση,

Μονάδες 6

Δ2) το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$,

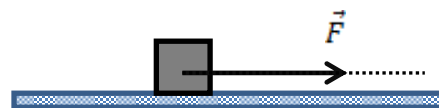
Μονάδες 6

Δ3) τη μάζα του κύβου,

Μονάδες 7

Δ4) το μέτρο της οριζόντιας δύναμης που πρέπει να ασκηθεί στον κύβο ώστε να αποκτήσει κινητική ενέργεια $K = 18 \text{ J}$ σε χρονικό διάστημα 2 s αν γνωρίζετε ότι αυτός βρίσκεται αρχικά ακίνητος σε λείο οριζόντιο δάπεδο.

Μονάδες 6



Ενδεικτική λύση

Δ1) Το έργο της τριβής είναι:

$$W_T = - T \cdot x = - 24 \text{ J}$$

Δ2) Από τη σχέση υπολογισμού του έργου σταθερής δύναμης

$$W_F = F \cdot x \text{ βρίσκουμε } F = 8 \text{ N.}$$

Δ3) Ο κύβος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Οι εξισώσεις της μετατόπισης και της ταχύτητας είναι αντίστοιχα

$$x = \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2 \quad (1)$$

$$v = \alpha \cdot t \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) υπολογίζουμε την επιτάχυνση:

$$\alpha = 2 \frac{m}{s^2}.$$

Από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F_x = m\alpha \text{ ή } F - T = m\alpha$$

απ' όπου βρίσκουμε ότι:

$$m = 1 \text{ kg.}$$

Δ4) Από τον τύπο της κινητικής ενέργειας:

$$K = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

βρίσκουμε

$$v = 6 \frac{m}{s}.$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης α' θα είναι

$$\alpha' = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ ή } \alpha = 3 \frac{m}{s^2}.$$

Από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα προκύπτει

$$F = m \cdot \alpha' \text{ ή } F = 3 \text{ N.}$$

ΘΕΜΑ Α

Ένα κιβώτιο μάζας $m = 20\text{Kg}$ είναι αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0\text{ s}$ με τη βοήθεια ενός σχοινιού ασκούμε στο κιβώτιο σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ με μέτρο 50N . Τη χρονική στιγμή $t = 2\text{ s}$ το κιβώτιο έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = 4\text{ m}$ πάνω στο οριζόντιο δάπεδο.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και ότι η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Να υπολογίσετε:

Α1) Την επιτάχυνση με την οποία κινείται το κιβώτιο.

Μονάδες 6

Α2) Το συντελεστή τριβής μεταξύ κιβωτίου και δαπέδου.

Μονάδες 7

Α3) Το έργο της δύναμης τριβής από τη χρονική στιγμή $t = 0\text{ s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή που το κιβώτιο κινείται με ταχύτητα μέτρου $2\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Μονάδες 7

Α4) Να παραστήσετε γραφικά το μέτρο της ταχύτητας του κιβωτίου σε συνάρτηση με το χρόνο σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων για το χρονικό διάστημα $0\text{ s} \rightarrow 2\text{ s}$.

Μονάδες 5

Ενδεικτική λύση

Δ1) Από την εξίσωση κίνησης

$$\Delta x = \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2$$

υπολογίζουμε την επιτάχυνση

$$\alpha = 2 \frac{m}{s^2}.$$

Δ2) Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$\Sigma F_x = m \cdot \alpha \quad \text{ή} \quad F - T = m \cdot \alpha$$

απ' όπου

$$T = 10 \text{ N} \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N - B = 0 \quad \text{ή} \quad N = B \quad \text{ή} \quad N = m \cdot g \quad \text{ή} \quad N = 200 \text{ N},$$

όπου $\vec{B}$ είναι το βάρος του σώματος και $\vec{N}$ είναι η κάθετη αντίδραση του δαπέδου.

$$\text{Οπότε} \quad \mu = \frac{T}{N} \quad \text{ή} \quad \mu = 0,05.$$

Δ3) Ο χρόνος στον οποίο το κιβώτιο αποκτά ταχύτητα $2 \frac{m}{s}$ υπολογίζεται από την εξίσωση της ταχύτητας:

$$v = \alpha \cdot t' \quad \text{και} \quad t' = 1 \text{ s}.$$

Στο χρόνο αυτό η μετατόπιση του κιβωτίου είναι:

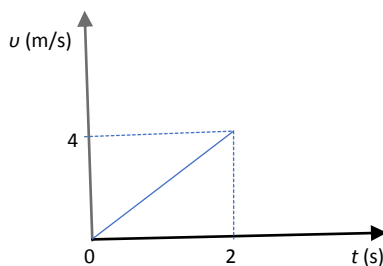
$$\Delta x' = \frac{1}{2} \alpha \cdot t'^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x' = 1 \text{ m}.$$

Το έργο της δύναμης της τριβής είναι:

$$W_T = - T \cdot x \quad \text{ή} \quad W_T = - 10 \text{ J}.$$

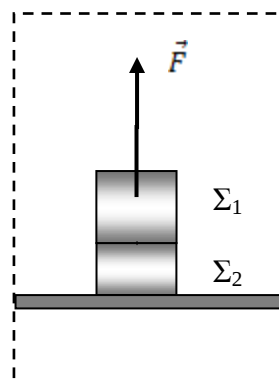
Δ4) Τη χρονική στιγμή $t'' = 2 \text{ s}$ η ταχύτητα του κιβωτίου είναι:

$$v'' = \alpha \cdot t'' \quad \text{ή} \quad v'' = 4 \frac{m}{s}.$$



ΘΕΜΑ Δ

Δυο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 3 \text{ Kg}$ και $m_2 = 2 \text{ Kg}$ αντίστοιχα και είναι συγκολλημένα. Το συσσωμάτωμα αρχικά είναι ακίνητο πάνω στο οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ ασκούμε μέσω νήματος μια κατακόρυφη σταθερή δύναμη $\vec{F}$ με μέτρο 60 N στο σώμα Σ_1 και το συσσωμάτωμα αρχίζει να ανυψώνεται κατακόρυφα. Μόλις το συσσωμάτωμα φτάσει σε ύψος $h = 16 \text{ m}$ από το έδαφος, το σώμα Σ_2 αποκολλάται, ενώ η δύναμη $\vec{F}$ συνεχίζει να ασκείται στο σώμα Σ_1 .



Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Θεωρήστε την αντίσταση του αέρα αμελητέα.

Να υπολογίσετε

Δ1) την επιτάχυνση με την οποία κινείται το συσσωμάτωμα των δύο σωμάτων πριν την αποκόλληση,

Μονάδες 6

Δ2) την χρονική στιγμή που αποκολλάται το Σ_2 ,

Μονάδες 6

Δ3) τη ταχύτητα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 τη στιγμή της αποκόλλησης,

Μονάδες 6

Δ4) τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του Σ_1 , με επίπεδο αναφοράς το έδαφος, 1 s μετά την αποκόλληση του Σ_2 .

Μονάδες 7

Ενδεικτική λύση

Δ1) Στο συσσωμάτωμα ασκείται συνισταμένη δύναμη:

$$\Sigma F = F - B \text{ ή } F - (m_1 + m_2)g = 10 \text{ N},$$

όπου $\vec{B}$ είναι το βάρος του συσσωματώματος.

Από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα υπολογίζουμε την επιτάχυνση:

$$\alpha = \frac{\Sigma F}{m_1 + m_2} \quad \text{ή} \quad \alpha = 2 \frac{m}{s^2}.$$

Δ2) Η χρονική στιγμή κατά την οποία αποκολλάται το Σ_2 υπολογίζεται από την εξίσωση κίνησης Q

$$h = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad \text{απ' όπου προκύπτει } t = 4 \text{ s.}$$

Δ3) Τη στιγμή της αποκόλλησης η ταχύτητα είναι κοινή για τα δύο σώματα και ίση με:

$$v = at = 8 \text{ m/s.}$$

Δ4) Όταν αποκολληθεί το σώμα Σ_2 , το σώμα Σ_1 συνεχίζει να κινείται με την επίδραση συνισταμένης δύναμης

$$\Sigma F' = F - B_1 = F - m_1 \cdot g = 30 \text{ N},$$

όπου $\vec{B}_1$ είναι το βάρος του Σ_1 .

Η επιτάχυνση του Σ_1 είναι :

$$\alpha' = \frac{\Sigma F}{m_1} \quad \text{ή} \quad \alpha' = 10 \frac{m}{s^2}.$$

Στο χρονικό διάστημα $\Delta t = 1 \text{ s}$ το σώμα Σ_1 ανέρχεται κατά:

$$\Delta h = v \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \alpha \cdot \Delta t^2 \quad \text{ή} \quad \Delta h = 13 \text{ m.}$$

Τη χρονική στιγμή $t_{ολ} = t + \Delta t = 5 \text{ s}$, το Σ_1 βρίσκεται σε ύψος

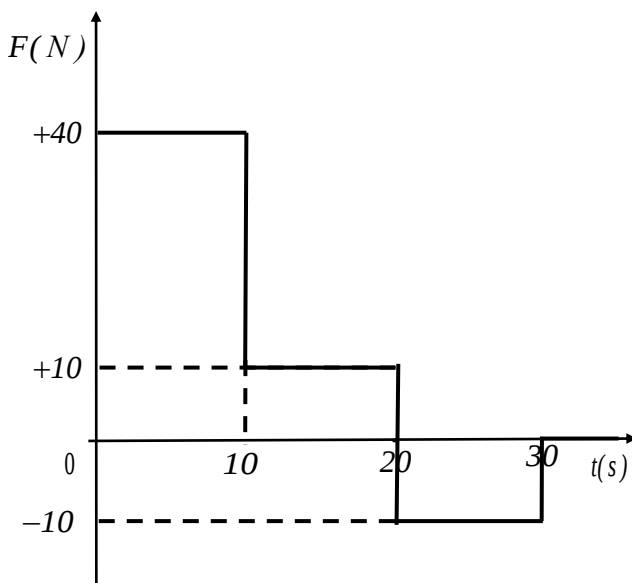
$$h_{ολ} = h + \Delta h \quad \text{ή} \quad h_{ολ} = 29 \text{ m από το έδαφος.}$$

Η βαρυτική δυναμική του ενέργεια είναι

$$U = m_1 \cdot g \cdot h_{ολ} \quad \text{ή} \quad U = 870 \text{ J.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Μικρό σώμα μάζας $m = 2 \text{ Kg}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,5$. Στο σώμα, τη χρονική στιγμή $t = 0$, ασκείται οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ της οποίας η τιμή μεταβάλλεται με τον χρόνο όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \frac{m}{s^2}$, ότι η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα και ότι για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 30 \text{ s}$ η κατεύθυνση της κίνησης του σώματος δεν μεταβάλλεται.



Για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 30 \text{ s}$:

Δ1) Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα της τιμής της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο ($a - t$).

Μονάδες 7

Δ2) Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα της τιμής της ταχύτητας που κινείται το σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο ($v - t$).

Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα που κινείται το σώμα.

Μονάδες 5

Δ4) Να υπολογίσετε το έργο της τριβής από τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή που σταματάει το σώμα.

Μονάδες 7

Ενδεικτική λύση

Δ1) Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Νεύτωνα, στον κατακόρυφο άξονα, ισχύει:

$$\Sigma F_y = N - B = 0 \text{ ή } N = B \text{ ή } N = mg,$$

όπου $\vec{B}$ είναι το βάρος του σώματος και $\vec{N}$ η κάθετη αντίδραση του δαπέδου.

Το μέτρο της τριβής είναι

$$T = \mu mg = 10 \text{ N}.$$

Η τιμή της επιτάχυνσης είναι σταθερή και υπολογίζεται από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα:

$$\alpha = \frac{F - T}{m}.$$

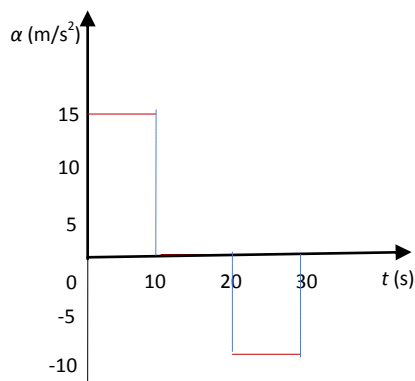
Οπότε

$$0 - 10 \text{ s: } \alpha_1 = 15 \text{ m/s}^2$$

$$10 - 20 \text{ s: } \alpha_2 = 0$$

$$20 - 30 \text{ s: } \alpha_3 = -10 \text{ m/s}^2$$

Το διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου θα είναι



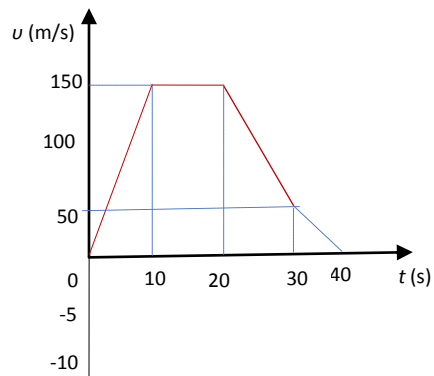
Η ταχύτητα είναι:

$$t_1 = 10 \text{ s: } v_1 = \alpha_1 \Delta t_1 = 150 \text{ m/s}$$

$$t_2 = 10 \text{ s} - t_3 = 20 \text{ s: } v_2 = 150 \text{ m/s}$$

$$t_4 = 30 \text{ s: } v_3 = v_2 - |\alpha_3| \Delta t_3 = 50 \text{ m/s}$$

Το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου θα είναι:



Δ3) Μετά το 30^ο δευτερόλεπτο στο σώμα ασκείται μόνο η τριβή. Το μέτρο της επιβράδυνσης του σώματος τότε είναι:

$$a_4 = \frac{T}{m} = 5 \text{ m/s}^2.$$

Η χρονική στιγμή κατά την οποία σταματάει το σώμα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v = v_3 - |a_4| \Delta t$$

θέτοντας $v = 0$, οπότε $\Delta t = 10 \text{ s}$ και $t_{\text{stop}} = 30 + \Delta t = 40 \text{ s}$.

Ο συνολικός χρόνος κίνησης του σώματος είναι:

$$t_{\text{ολ}} = t_{\text{stop}}.$$

Δ4) Από το εμβαδό του σχήματος που σχηματίζεται από το διάγραμμα $v - t$ για το χρονικό διάστημα $0 - 40 \text{ s}$ υπολογίζουμε τη μετατόπιση του σώματος από την έναρξη της κίνησής του μέχρι να σταματήσει:

$$x = 3500 \text{ m}.$$

Οπότε το έργο της τριβής είναι:

$$W_T = - T \cdot x = - 35000 \text{ J}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Ένα μικρό σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ ασκούνται ταυτόχρονα στο σώμα οι σταθερές οριζόντιες δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ με μέτρα $F_1 = 30 \text{ N}$ και $F_2 = 10 \text{ N}$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η δύναμη $\vec{F}_1$ ασκείται στο σώμα στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 5 \text{ s}$ ενώ η δύναμη $\vec{F}_2$ ασκείται στο σώμα στη χρονική διάρκεια $0 \text{ s} \rightarrow 7 \text{ s}$. Η αντίσταση του αέρα να θεωρηθεί αμελητέα.



Δ1) Να κατασκευάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση της τιμής της συνισταμένης δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο και υπολογίσετε την τιμή της επιτάχυνσης του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ και τη χρονική στιγμή $t_2 = 6 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ2) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του σώματος τη χρονική στιγμή $t_3 = 10 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του σώματος από τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_3 = 10 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ4) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}_1$ και το έργο της δύναμης $\vec{F}_2$ από τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_3 = 10 \text{ s}$.

Μονάδες 7

Ενδεικτική λύση

Δ1) Το χρονικό διάστημα 0-5 s η συνισταμένη δύναμη είναι σταθερή και έχει μέτρο:

$$\Sigma F = F_1 - F_2 = 20 \text{ N.}$$

Το χρονικό διάστημα 5-7 s η συνισταμένη δύναμη είναι σταθερή και έχει μέτρο:

$$\Sigma F' = -F_2 = -10 \text{ N.}$$

Μετά το 7^ο δευτερόλεπτο η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν.

Εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Νεύτωνα:

$$a = \frac{\Sigma F}{m}$$

βρίσκουμε ότι τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ η επιτάχυνση έχει τιμή

$$a = 10 \frac{m}{s^2}$$

και τη χρονική στιγμή $t_2 = 6 \text{ s}$ η επιτάχυνση έχει τιμή

$$a' = -5 \frac{m}{s^2}.$$

Δ2) Τη χρονική στιγμή $t = 5 \text{ s}$ το σώμα έχει αποκτήσει ταχύτητα:

$$v = a \cdot t \quad \text{ή} \quad v = 50 \frac{m}{s}.$$

Τη χρονική στιγμή $t' = 7 \text{ s}$ θα έχει αποκτήσει ταχύτητα:

$$v' = v - |a'| \cdot (t' - t) \quad \text{ή} \quad v' = 40 \frac{m}{s}.$$

Μετά το 7^ο δευτερόλεπτο το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, σύμφωνα με τον 1^ο νόμο του Νεύτωνα. Επομένως τη χρονική στιγμή $t_3 = 10 \text{ s}$ θα έχει κινητική ενέργεια:

$$K = \frac{1}{2} m \cdot v'^2 \quad \text{ή} \quad K = 1600 \text{ J.}$$

Δ3) Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης βρίσκουμε ότι

για το χρονικό διάστημα 0-5 s: $\Delta x_1 = \frac{1}{2} a \Delta t_1^2 = 125 \text{ m,}$

για το χρονικό διάστημα 5-7 s: $\Delta x_2 = v \Delta t_2 - \frac{1}{2} |a'| \Delta t_2^2 = 90 \text{ m,}$

για το χρονικό διάστημα 7-10 s: $\Delta x_3 = v' \Delta t_3 = 120 \text{ m.}$

Η μετατόπιση στο χρονικό διάστημα 0 – 10 s είναι:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 335 \text{ m.}$$

Δ4)

$$W_{F1} = F_1 \Delta x_1 = 3750 \text{ J και } W_{F2} = -F_2 (\Delta x_1 + \Delta x_2) = -2150 \text{ J.}$$

ΘΕΜΑ Α

Ένα ξύλινο κιβώτιο μάζας $m = 50 \text{ kg}$ βρίσκεται ακίνητο σε οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$, κατά την οποία το κιβώτιο βρίσκεται στη θέση $x = 0 \text{ m}$ του οριζόντιου προσανατολισμένου άξονα Ox , αρχίζει να ασκείται σε αυτό σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ με μέτρο 150 N . Αφού το κιβώτιο μετατοπιστεί κατά $\Delta x_1 = 20 \text{ m}$ καταργείται ακαριαία η δύναμη $\vec{F}$. Στη συνέχεια το κιβώτιο κινείται ακόμα κατά $\Delta x_2 = 10 \text{ m}$ και σταματά. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και ότι η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Να υπολογίσετε:

Δ1) Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ για την μετατόπιση $\Delta x_1 = 20 \text{ m}$.

Μονάδες 5

Δ2) Τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και δαπέδου.

Μονάδες 8

Δ3) Την τιμή της επιτάχυνσης του κιβωτίου στη διάρκεια της μετατόπισής του κατά $\Delta x_2 = 10 \text{ m}$.

Μονάδες 6

Δ4) Την κινητική ενέργεια του κιβωτίου την στιγμή που καταργείται η δύναμη $\vec{F}$.

Μονάδες 6

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Από τον ορισμό για το έργο σταθερής δύναμης θα έχουμε για το έργο της F και για την μετατόπιση Δx_1 :

$$W_F = F \cdot \Delta x_1 \cdot \sin 0^\circ \Rightarrow W_F = 3000 \text{ J.}$$

Δ2) Από το θεώρημα έργου – ενέργειας για την κίνηση του κιβωτίου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή που σταματά να κινείται ισχύει ότι :

$$0 - 0 = W_F + W_T.$$

Το έργο της τριβής, για τη συνολική κίνηση, θα είναι ίσο με

$$W_T = T \cdot (\Delta x_1 + \Delta x_2) \cdot \sin 180^\circ.$$

Το μέτρο της δύναμης της τριβής να δίνεται από τη σχέση:

$$T = \mu \cdot N.$$

Επειδή όμως το σώμα ισορροπεί στον κατακόρυφο άξονα y θα έχουμε ότι:

$$\sum F = 0 \Rightarrow N - w = 0 \Rightarrow N = m \cdot g.$$

Άρα το έργο της τριβής θα δίνεται από τη σχέση

$$W_T = -\mu \cdot m \cdot g \cdot (\Delta x_1 + \Delta x_2).$$

Εισάγοντας την τελευταία σχέση για το έργο της τριβής, αλλά και το έργο της δύναμης F που υπολογίστηκε στο (Δ1) στην εξίσωση του θεωρήματος έργου-ενέργειας προκύπτει:

$$0 - 0 = 3600 - \mu \cdot m \cdot g \cdot (\Delta x_1 + \Delta x_2) \Rightarrow \mu = 0,2.$$

Δ3) Μετά την κατάργηση της δύναμης F το κιβώτιο εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση εξαιτίας της τριβής. Από το 2^ο Νόμο του Νεύτωνα (θετική φορά αυτή της κίνησης) θα έχουμε:

$$-T = m \cdot a \Rightarrow a = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ4) Αν τη στιγμή που καταργείται η δύναμη F η ταχύτητα του κιβωτίου είναι ίση με v_1 , τότε για την κίνηση που θα επακολουθήσει θα ισχύει ότι:

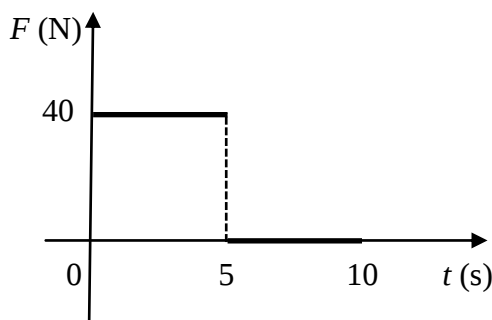
$$\Delta x_2 = x_{stop} = \frac{v_1^2}{2 \cdot |a|} \Rightarrow v_1 = \sqrt{40} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η κινητική ενέργεια του κιβωτίου, τη στιγμή που παύει να δρα η δύναμη F , θα είναι:

$$K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \Rightarrow K = 1000 \text{ J.}$$

ΘΕΜΑ Α

Μικρό σώμα μάζας $m = 4 \text{ kg}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο δάπεδο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και δαπέδου είναι $\mu = 0,4$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ που η τιμή της μεταβάλλεται με τον χρόνο όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα με αποτέλεσμα το σώμα να αρχίσει να μετακινείται πάνω σε αυτό. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και ότι η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα.



Α1) Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα επιτάχυνσης- χρόνου ($a-t$) για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 10 \text{ s}$ γνωρίζοντας ότι το σώμα ακινητοποιείται μετά τη χρονική στιγμή $t = 10 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Α2) Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα ταχύτητας- χρόνου ($v-t$) για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 10 \text{ s}$.

Μονάδες 7

Α3) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}$ για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 5 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Α4) Να υπολογίσετε το έργο της τριβής για το χρονικό διάστημα $5 \rightarrow 10 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Η τριβή ολίσθησης που δρα στο σώμα κατά την κίνησή του υπολογίζεται από τη σχέση:

$$T = \mu \cdot N.$$

Επειδή όμως το σώμα ισορροπεί στον άξονα y (κατακόρυφος άξονας) έχουμε ότι:

$$\sum F = 0 \Rightarrow N - w = 0 \Rightarrow N = m \cdot g.$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει ότι:

$$T = \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow T = 16 \text{ N}.$$

Στο χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 5 \text{ s}$ είναι $F = 40 \text{ N}$, οπότε από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για το σώμα (θετική φορά αυτή της κίνησης) προκύπτει:

$$F - T = m \cdot \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

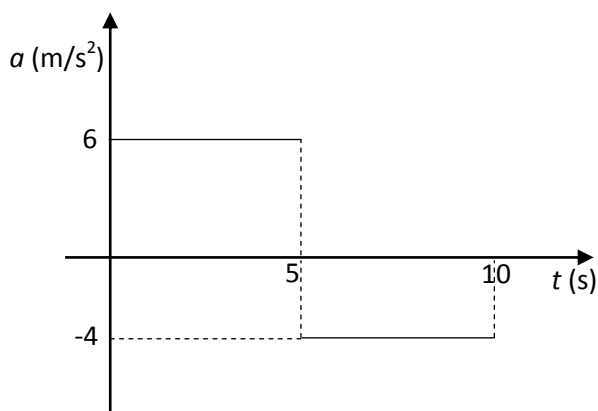
και το σώμα θα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Στο χρονικό διάστημα $5 \rightarrow 10 \text{ s}$ είναι $F = 0 \text{ N}$, οπότε από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για το σώμα (θετική φορά αυτή της κίνησης) προκύπτει:

$$-T = m \cdot \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

και το σώμα θα εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Το ζητούμενο διάγραμμα φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Δ2) Στο χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 5 \text{ s}$ το σώμα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και η ταχύτητά του δίνεται από τη σχέση $v_1 = a_1 \cdot t$ αφού δεν υπάρχει αρχική ταχύτητα.

Τη χρονική στιγμή $t = 5 \text{ s}$ η ταχύτητά του θα είναι $v_1 = 30 \text{ m/s}$ και η γραφική παράσταση στο διάγραμμα $v - t$ θα είναι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Στο χρονικό διάστημα $5 \rightarrow 10 \text{ s}$ το σώμα εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, με αρχική ταχύτητα $v_1 = 30 \text{ m/s}$ και η ταχύτητά του δίνεται από τη σχέση:

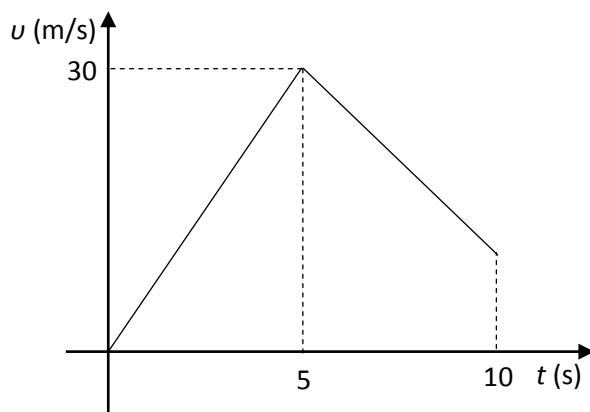
$$v_2 = 30 - a_2 \cdot \Delta t$$

όπου Δt το χρονικό διάστημα που εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση. Αυτό σημαίνει ότι μετά από

$$\Delta t = 10 - 5 = 5 \text{ s}$$

η ταχύτητα του σώματος θα έχει γίνει $v_2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και η γραφική παράσταση στο διάγραμμα $v - t$ θα είναι μια ευθεία με αρνητική κλίση που θα καταλήγει στην ταχύτητα των 10 m/s .

Το ζητούμενο διάγραμμα φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Δ3) Η μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 5 \text{ s}$ μπορεί να υπολογιστεί από το εμβαδόν του τριγώνου στο διάγραμμα $v - t$ που έχει βάση 5 s και ύψος 30 m/s . Επομένως θα είναι:

$$\Delta x_1 = E_{\text{τρίγωνου}} = 75 \text{ m.}$$

Από τον ορισμό για το έργο σταθερής δύναμης θα έχουμε ότι το έργο της $F = 40 \text{ N}$ για την προηγούμενη μετατόπιση Δx_1 θα είναι:

$$W_F = F \cdot \Delta x_1 \cdot \sin 0^\circ \Rightarrow W_F = 3000 \text{ J.}$$

Δ4) Παρόμοια με το προηγούμενο ερώτημα, η μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα $5 \rightarrow 10 \text{ s}$ μπορεί να υπολογιστεί από το εμβαδόν του τραπεζίου στο διάγραμμα $v - t$ που έχει βάσεις 10 m/s και 30 m/s και ύψος $10 - 5 = 5 \text{ s}$. Επομένως θα είναι:

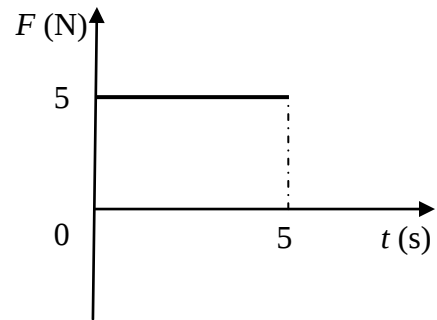
$$\Delta x_2 = E_{\text{τραpezιου}} = 100 \text{ m.}$$

Από τον ορισμό για το έργο σταθερής δύναμης θα έχουμε ότι το έργο της τριβής ολίσθησης, για την προηγούμενη μετατόπιση Δx_2 , θα είναι:

$$W_T = T \cdot \Delta x_2 \cdot \sigma\upsilon\nu 180^\circ \Rightarrow W_T = -1600 \text{ J}.$$

ΘΕΜΑ Α

Μικρό σώμα μάζας $m = 400 \text{ g}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο δάπεδο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και δαπέδου είναι $\mu = 0,25$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ σταθερής τιμής με τον χρόνο όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και ότι η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα.

Να υπολογίσετε:

Δ1) Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 3 \text{ s}$.

Μονάδες 8

Δ2) Τη μετατόπιση του σώματος στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow 5 \text{ s}$.

Μονάδες 5

Δ3) Το έργο της δύναμης F στη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow 5 \text{ s}$.

Μονάδες 5

Δ4) Την κινητική ενέργεια του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 3 \text{ s}$.

Μονάδες 7

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Η δύναμη της τριβής μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση $T = \mu \cdot N$ που αν συνδυαστεί με την εξίσωση που προκύπτει από την ισορροπία του σώματος στον άξονα y (κατακόρυφο άξονα)

$$\sum F = 0 \Rightarrow N - w = 0 \Rightarrow N = m \cdot g$$

δίνει:

$$T = \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow T = 1 \text{ N.}$$

Επειδή για $t_1 = 3 \text{ s}$ (αλλά και για $t = 0$) από το διάγραμμα διαπιστώνουμε ότι $F = 5 \text{ N} > T$ το σώμα θα ξεκινήσει να κινείται. Από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα η επιτάχυνση θα είναι:

$$F - T = m \cdot a \Rightarrow a = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Δ2) Το κιβώτιο κινείται ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα, ξεκινώντας από την ακινησία, επομένως από την εξίσωση της μετατόπισης έχουμε:

$$\Delta x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow \Delta x = 125 \text{ m.}$$

Δ3) Από τον ορισμό για το έργο σταθερής δύναμης θα έχουμε για το έργο της F κατά την μετατόπιση $\Delta x = 16 \text{ m}$:

$$W_F = F \cdot \Delta x \cdot \sin 0^\circ \Rightarrow W_F = 625 \text{ J.}$$

Δ4) Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα θα έχει ταχύτητα:

$$v_1 = a \cdot t \Rightarrow v_1 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η κινητική ενέργεια του σώματος θα είναι:

$$K_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow K = 180 \text{ J.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Ένα φορτηγό κινείται σε ευθύγραμμο οριζόντιο δρόμο με ταχύτητα που έχει σταθερό μέτρο ίσο με $72 \frac{km}{h}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, που διέρχεται από ένα σημείο Α του δρόμου, ξεκινά από το ίδιο σημείο να κινείται μία μοτοσυκλέτα με σταθερή επιτάχυνση ίση με $2 \frac{m}{s^2}$.

Αν το φορτηγό και η μοτοσυκλέτα κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση να υπολογίσετε:

Δ1) Τη χρονική στιγμή t_1 όπου τα δύο οχήματα θα έχουν την ίδια ταχύτητα.

Μονάδες 6

Δ2) Τη χρονική στιγμή και την απόσταση από το σημείο Α που θα συναντηθούν το φορτηγό και η μοτοσυκλέτα.

Μονάδες 7

Δ3) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του μέτρου της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο για το φορτηγό και τη μοτοσυκλέτα, σε βαθμολογημένους άξονες από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή όπου τα οχήματα συναντώνται.

Μονάδες 7

Δ4) Αν οι μάζες του φορτηγού και της μοτοσυκλέτας είναι 5000 kg και 500 kg αντιστοίχως και οι κινητικές ενέργειες τη στιγμή της συνάντησής τους K_Φ και K_M αντιστοίχως, να υπολογίσετε το πηλίκο $\frac{K_\Phi}{K_M}$ τη χρονική στιγμή $t_2 = 5$ s.

Μονάδες 5

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Τη ζητούμενη χρονική στιγμή (t_1) για τις ταχύτητες του φορτηγού (v_ϕ) και της μοτοσυκλέτας (v_M) θα ισχύει ότι $v_\phi = v_M$.

Το φορτηγό όμως κινείται ομαλά με ταχύτητα $v_\phi = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \rightarrow v_\phi = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, ενώ η μοτοσυκλέτα κινείται με σταθερή επιτάχυνση $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και χωρίς αρχική ταχύτητα, επομένως την τυχαία χρονική στιγμή θα έχει ταχύτητα που θα δίνεται από τη σχέση

$$v_M = a \cdot t.$$

Αντικαθιστώντας την σταθερή ταχύτητα του φορτηγού και τη σχέση για την ταχύτητα της μοτοσυκλέτας στην αρχική εξίσωση έχουμε:

$$20 = a \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = 10 \text{ s}.$$

Δ2) Τη ζητούμενη χρονική στιγμή (t') για τις θέσεις του φορτηγού (x_ϕ) και της μοτοσυκλέτας (x_M) θα ισχύει ότι $x_\phi = x_M$. Το φορτηγό όμως κινείται ομαλά, επομένως η θέση του θα δίνεται κάθε στιγμή από την εξίσωση:

$$x_\phi = v_\phi \cdot t$$

ενώ η μοτοσυκλέτα κινείται με σταθερή επιτάχυνση:

$$a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

και χωρίς αρχική ταχύτητα, επομένως την τυχαία χρονική στιγμή η θέση της θα δίνεται από τη σχέση

$$x_M = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Αντικαθιστώντας τις δύο εξισώσεις που δίνουν τις θέσεις του φορτηγού και της μοτοσυκλέτας στην αρχική εξίσωση έχουμε:

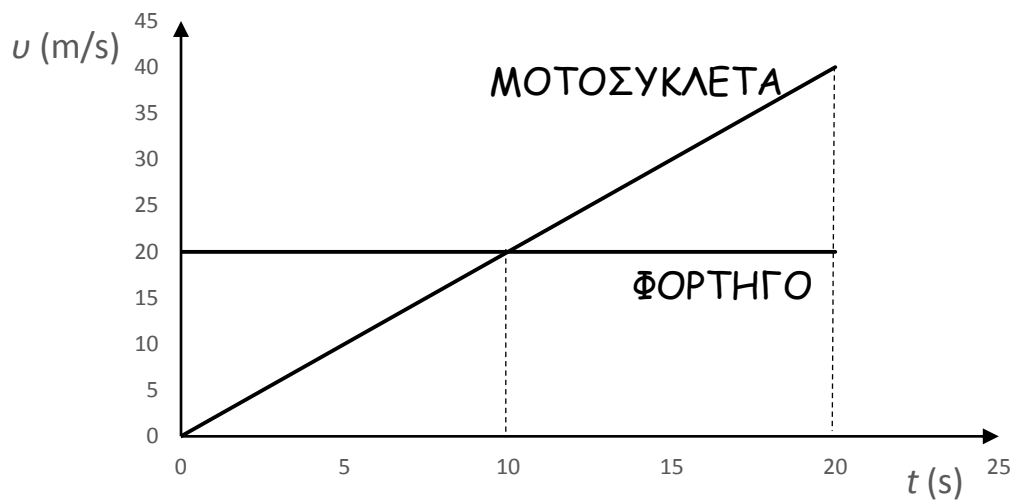
$$v_\phi \cdot t' = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t'^2$$

που δίνει δύο λύσεις τις $t' = 0$ και $t' = 20 \text{ s}$ με δεκτή τη δεύτερη.

Η απόσταση από το Α στην οποία θα συναντηθούν θα προκύψει από μια από τις εξισώσεις θέσης ως εξής:

$$x_{\text{συνάντησης}} = x_\phi = v_\phi \cdot t' = 400 \text{ m}.$$

Δ3) Με βάση το είδος των κινήσεων που εκτελούν τα δύο σώματα σχεδιάζουμε το ακόλουθο διάγραμμα. Σε αυτό σημειώνονται οι χρονικές στιγμές $t_1 = 10\text{s}$ που τα κινητά έχουν τις ίδιες ταχύτητες και $t' = 20\text{s}$ που τα κινητά συναντώνται.



Δ4) Ο ζητούμενος λόγος των κινητικών ενεργειών θα είναι:

$$\frac{K_{\Phi}}{K_M} = \frac{\frac{1}{2} m_{\Phi} v_{\Phi}^2}{\frac{1}{2} m_M v_M^2}.$$

Όμως τη χρονική στιγμή $t_2 = 20\text{s}$ η ταχύτητα της μοτοσυκλέτας θα είναι:

$$v_M = a \cdot t = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

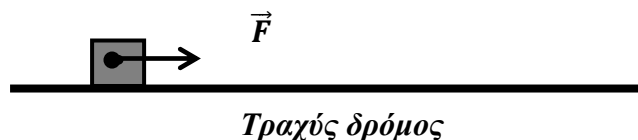
οπότε ο λόγος των κινητικών ενεργειών προκύπτει ίσος με

$$\frac{K_{\Phi}}{K_M} = 2,5.$$

ΘΕΜΑ Α

Ένα κιβώτιο μάζας $m = 4 \text{ kg}$ βρίσκεται ακίνητο σε οριζόντιο δρόμο με τον οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης ίσο με 0,2. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ασκείται στο κιβώτιο σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, με αποτέλεσμα το κιβώτιο να ξεκινήσει αμέσως να κινείται. Ένας μαθητής που παρατηρεί την κίνηση σημειώνει ότι τη χρονική στιγμή $t = 4 \text{ s}$ το κιβώτιο έχει διανύσει 32 m.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = \frac{m}{s^2}$ και ότι η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα.



Δ1) Υπολογίστε το μέτρο της επιτάχυνσης του κιβωτίου.

Μονάδες 5

Δ2) Προσδιορίστε το μέτρο της οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$.

Μονάδες 7

Δ3) Ποιο είναι το διάστημα που διανύει το κιβώτιο κατά τη διάρκεια του 3^{ου} δευτερολέπτου της κίνησης του.

Μονάδες 6

Τη χρονική στιγμή $t = 4 \text{ s}$ η δύναμη $\vec{F}$ καταργείται, με αποτέλεσμα το κιβώτιο να επιβραδυνθεί και τελικά να σταματήσει.

Δ4) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης της τριβής από τη χρονική στιγμή $t = 4 \text{ s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή που το κιβώτιο σταματά να κινείται.

Μονάδες 7

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το κιβώτιο εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, επομένως από την εξίσωση της μετατόπισης (που ταυτίζεται με αυτή του διαστήματος) έχουμε:

$$\Delta x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow a = \frac{2 \cdot \Delta x}{t^2} \Rightarrow a = 4 \frac{m}{s^2}.$$

Δ2) Από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα (θετική φορά αυτή της κίνησης) θα έχουμεQ

$$F - T = m \cdot a.$$

Εκφράζουμε την τριβή ως

$$T = \mu \cdot N$$

Το σώμα ισορροπεί στον άξονα y (κατακόρυφο άξονα) συνεπώς έχουμε ότι:

$$\sum F = 0 \Rightarrow N - w = 0 \Rightarrow N = m \cdot g.$$

Εισάγοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις στην έκφραση του νόμου του Νεύτωνα λαμβάνουμε:

$$F - \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot (\mu \cdot g + a) \Rightarrow F = 24 \text{ N}.$$

Δ3) Το τρίτο δευτερόλεπτο ξεκινά τη χρονική στιγμή $t_2 = 2 \text{ s}$ και ολοκληρώνεται την $t_3 = 3 \text{ s}$. Υπολογίζοντας τις θέσεις του κιβωτίου αυτές τις δύο χρονικές στιγμές και αφαιρώντας τις θα προσδιορίσουμε το ζητούμενο διάστημα που είναι ίσο με την μετατόπιση. Δηλαδή:

$$\Delta x = x_3 - x_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_3^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \Rightarrow \Delta x = 10 \text{ m}.$$

Δ4) Τη χρονική στιγμή $t = 4 \text{ s}$ που καταργείται η δύναμη F το κιβώτιο έχει ταχύτητα:

$$v = a \cdot t \Rightarrow v = 16 \frac{m}{s}$$

όπου a η επιτάχυνση που προσδιορίσαμε στο ερώτημα (Δ1).

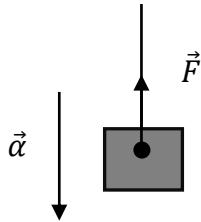
Από το θεώρημα έργου-ενέργειας μεταξύ της χρονικής στιγμής $t = 4 \text{ s}$ και της στιγμής που το κιβώτιο ακινητοποιείται θα έχουμε:

$$0 - K = W_T \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = W_T \Rightarrow W_T = -512 \text{ J}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Ένας γερανός κατεβάζει κατακόρυφα ένα αρχικά ακίνητο δέμα που βρισκόταν σε ύψος 20 m από την επιφάνεια του εδάφους και έχει μάζα 50 kg, με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Στο δέμα ασκείται δύναμη $\vec{F}$ από το συρματόσχοινο με το οποίο είναι δεμένο όπως φαίνεται στο σχήμα.



Αν η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, ενώ η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίση με $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ να υπολογίσετε:

Δ1) Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

Μονάδες 6

Δ2) Το μέτρο της ταχύτητας του δέματος όταν έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά 2 m από την αρχική του θέση.

Μονάδες 7

Δ3) Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ και το έργο του βάρους, όταν το δέμα έχει μετατοπιστεί κατά 8 m.

Μονάδες 6

Δ4) Τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του δέματος όταν έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά 2 m από τη αρχική του θέση.

Μονάδες 6

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για το κιβώτιο που κατεβαίνει (θετική φορά προς τα κάτω) προκύπτει:

$$w - F = m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot (g - a) \Rightarrow F = 450 \text{ N.}$$

Δ2) Το κιβώτιο κινείται ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα, ξεκινώντας από την ηρεμία, επομένως από την εξίσωση της μετατόπισης έχουμε:

$$\Delta y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta y}{a}} \Rightarrow t = 2 \text{ s.}$$

Η ταχύτητα του κιβωτίου θα είναι λοιπόν:

$$v = a \cdot t \Rightarrow v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δ3) Από τον ορισμό για το έργο σταθερής δύναμης θα έχουμε για το έργο της F κατά την μετατόπιση $\Delta y = 8 \text{ m}$:

$$W_F = F \cdot \Delta y \cdot \sin 180^\circ \Rightarrow W_F = -3600 \text{ J.}$$

Ομοίως, το έργο του βάρους για την ίδια μετατόπιση θα είναι:

$$W_w = w \cdot \Delta y \cdot \sin 0^\circ \Rightarrow W_w = 4000 \text{ J.}$$

Δ4) Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας θα είναι Q

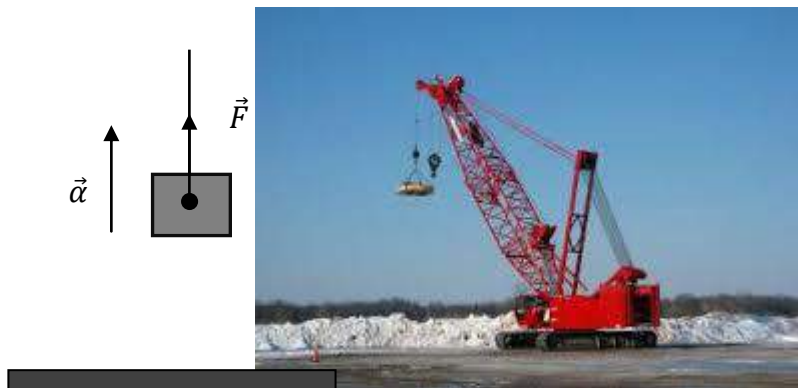
$$\Delta U = U_{\text{τελική}} - U_{\text{αρχική}}$$

και θεωρώντας μηδενική την τελική δυναμική ενέργεια έχουμε:

$$\Delta U = -m \cdot g \cdot h = -1000 \text{ J.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Ένας γερανός ανεβάζει κατακόρυφα ένα αρχικά ακίνητο κιβώτιο που βρίσκεται στην επιφάνεια του εδάφους και έχει μάζα 100 kg , με σταθερή επιτάχυνση $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Στο κιβώτιο ασκείται δύναμη $\vec{F}$ από το συρματόσχοινο με το οποίο είναι δεμένο όπως φαίνεται στο σχήμα.



Αν η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, ενώ η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίση με $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ να υπολογίσετε:

Δ1) Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

Μονάδες 6

Δ2) Το χρόνο κίνησης του κιβωτίου όταν έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά 16 m . Θεωρήστε ως $t = 0 \text{ s}$ τη στιγμή που ξεκινά να ασκείται η $\vec{F}$ και το κιβώτιο εγκαταλείπει το έδαφος.

Μονάδες 5

Δ3) Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ καθώς και το έργο του βάρους, όταν το κιβώτιο έχει μετατοπιστεί κατά 8 m .

Μονάδες 7

Δ4) Το λόγο $\frac{K_1}{K_2}$, αν K_1 και K_2 είναι οι κινητικές ενέργειες του κιβωτίου σε ύψη 4 m και 9 m από το έδαφος αντιστοίχως.

Μονάδες 7

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για το κιβώτιο που ανεβαίνει (θετική φορά προς τα πάνω) προκύπτει:

$$F - w = m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot (g + a) \Rightarrow F = 1200 \text{ N}.$$

Δ2) Το κιβώτιο κινείται ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα, επομένως από την εξίσωση της μετατόπισης έχουμε:

$$\Delta y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta y}{a}} \Rightarrow t = 4 \text{ s}.$$

Δ3) Από τον ορισμό για το έργο σταθερής δύναμης θα έχουμε για το έργο της F κατά την μετατόπιση $\Delta y = 8 \text{ m}$:

$$W_F = F \cdot \Delta y \cdot \sin 0^\circ \Rightarrow W_F = 9600 \text{ J}.$$

Ομοίως, το έργο του βάρους, για την ίδια μετατόπιση, θα είναι:

$$W_w = w \cdot \Delta y \cdot \sin 180^\circ \Rightarrow W_w = -8000 \text{ J}.$$

Δ4) Από το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας – Έργου, όπως εφαρμόζεται μεταξύ της αρχικής θέσης και του ύψους $y_1 = 4 \text{ m}$, προκύπτει:

$$K_1 - 0 = W_F + W_w \Rightarrow K_1 = F \cdot y_1 \cdot \sin 0^\circ + w \cdot y_1 \cdot \sin 180^\circ \Rightarrow K_1 = 800 \text{ J}.$$

Παρομοίως για $y_2 = 9 \text{ m}$ προκύπτει:

$$K_2 - 0 = W_F + W_w \Rightarrow K_2 = F \cdot y_2 \cdot \sin 0^\circ + w \cdot y_2 \cdot \sin 180^\circ \Rightarrow K_2 = 1800 \text{ J}.$$

Επομένως, για το ζητούμενο λόγο των κινητικών ενεργειών θα έχω:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{4}{9}.$$

ΘΕΜΑ Α

Σε κιβώτιο μάζας $m = 10 \text{ kg}$, το οποίο αρχικά ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο, αρχίζει την στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ να ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}_1$ μέτρου 20 N .

Δ1) Να υπολογισθεί το διάστημα που θα διανύσει το κιβώτιο από $t_0 = 0 \text{ s}$ έως $t_1 = 10 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ2) Να υπολογισθεί το έργο της δύναμης $\vec{F}_1$ στο παραπάνω χρονικό διάστημα.

Μονάδες 6

Έστω ότι την στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ εκτός από τη δύναμη $\vec{F}_1$ ασκείται στο κιβώτιο και μια δεύτερη δύναμη $\vec{F}_2$ ίση με την $\vec{F}_1$, δηλαδή οι δυνάμεις έχουν ίδιο μέτρο και κατεύθυνση.

Δ3) Να υπολογισθεί η επιτάχυνση του κιβωτίου όταν ασκούνται σε αυτό ταυτόχρονα και οι δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

Μονάδες 5

Δ4) Να υπολογίσετε πάλι το έργο της δύναμης $\vec{F}_1$ από $t_0 = 0 \text{ s}$ έως $t_1 = 10 \text{ s}$ όταν ασκούνται ταυτόχρονα και οι δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Να συγκρίνετε αυτό το έργο με το έργο που υπολογίσατε στο ερώτημα Δ2.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Α

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση. Για το χρονικό διάστημα $t_0=0$ s έως $t_1=10$ s:

$$F_1=m \cdot a, \quad a = \frac{F_1}{m} \quad \text{ή} \quad a = 2 \frac{m}{s^2}$$

$$x = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad \text{ή} \quad x = 100 \text{ m}$$

Δ2) Το έργο της δύναμης $\vec{F}_1$ είναι:

$$W = F_1 \cdot \Delta x = 2000 \text{ J}$$

Δ3) Στο κιβώτιο ασκείται μια δύναμη $\vec{F}_2$ που είναι ίση με τη δύναμη $\vec{F}_1$. Από τον 1^ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F = m \cdot a_1 \quad \text{ή} \quad F_1 + F_2 = m \cdot a_1$$

και η νέα επιτάχυνση είναι:

$$a_1 = 4 \frac{m}{s^2}$$

Δ4) Εφόσον ασκούνται δύο δυνάμεις, $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, η μετατόπιση Δx θα είναι:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_1 \cdot t^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x = 200 \text{ m}$$

Το έργο:

$$W_{F1} = F_1 \cdot \Delta x \quad \text{ή} \quad W_{F1} = 20 \cdot 200 \text{ J} \quad \text{ή} \quad W_{F1} = 4000 \text{ J}$$

Το έργο W_{F1} στο ερώτημα Δ4 είναι διπλάσιο από το έργο που υπολογίστηκε στο ερώτημα Δ2.

ΘΕΜΑ Α

Σε κιβώτιο μάζας $m = 10 \text{ kg}$, το οποίο αρχικά ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο δάπεδο, αρχίζει την στιγμή $t_0 = 0$ να ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 30 N , οπότε το κιβώτιο ξεκινά να ολισθαίνει πάνω στο δάπεδο.

Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και δαπέδου είναι $\mu=0,2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει μέτρο $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Δ1) Να υπολογισθεί το μέτρο της τριβής που ασκείται στο κιβώτιο κατά την ολίσθησή του καθώς και η επιτάχυνσή του.

Μονάδες 6

Δ2) Να υπολογισθεί το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από $t_0 = 0 \text{ s}$ έως $t_1 = 4 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογισθεί στο παραπάνω χρονικό διάστημα η ενέργεια που μεταφέρθηκε από το κιβώτιο στο περιβάλλον του μέσω του έργου της τριβής.

Μονάδες 6

Δ4) Αν το δάπεδο ήταν λείο, πόσο θα ήταν το έργο της δύναμης $\vec{F}$ για το ίδιο χρονικό διάστημα δηλαδή από $t_0 = 0 \text{ s}$ έως $t_1 = 4 \text{ s}$.

Να συγκρίνετε αυτό το έργο με το έργο που υπολογίσατε στο ερώτημα Δ2.

Μονάδες 7

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το κιβώτιο εκτελεί ευθύγραμμα ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση και από τον 1^ο νόμο του Νεύτωνα ισχύει:

$$\Sigma F = m \cdot a \text{ δηλαδή } F - T = m \cdot a \quad (1)$$

$$\text{όπου } T = \mu \cdot N \text{ ή } T = \mu \cdot B \quad \text{ή} \quad T = \mu \cdot m \cdot g \quad \text{ή} \quad T = 20 \text{ N}$$

Αντικαθιστούμε στην (1)

$$F - \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \text{ και } a = \frac{F - T}{m} \quad \text{ή} \quad a = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Δ2) Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι $W_F = F \cdot x$ όπου x η μετατόπιση για το χρονικό διάστημα $t_0 = 0 \text{ s}$ έως $t_1 = 4 \text{ s}$:

$$x = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad \text{ή} \quad x = 8 \text{ m}$$

$$W_F = F \cdot x \quad \text{ή} \quad W_F = 240 \text{ J}$$

Δ3) Η ενέργεια που μεταφέρθηκε από το κιβώτιο στο περιβάλλον του μέσω του έργου τριβής:

$$W_T = T \cdot x = 160 \text{ J}$$

Δ4) Όταν το δάπεδο είναι λείο:

$$\Sigma F = m \cdot a' \quad \text{ή} \quad F = m \cdot a'$$

$$a' = \frac{F}{m} \quad \text{ή} \quad a' = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Για το ίδιο χρονικό διάστημα η νέα μετατόπιση x' θα είναι:

$$x' = \frac{1}{2} a' \cdot t^2, \quad x' = 24 \text{ m}$$

Το έργο W' που παράγεται είναι:

$$W' = F \cdot x' \quad \text{ή} \quad W' = 720 \text{ J}$$

Το έργο W' σε λείο δάπεδο είναι τριπλάσιο από το W σε ολισθηρό δάπεδο της ερώτησης Δ2.

ΘΕΜΑ Α

Ένα κιβώτιο με βιβλία συνολικής μάζας $m = 50 \text{ kg}$ είναι ακίνητο πάνω στο δάπεδο του διαδρόμου ενός σχολείου. Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ δύο μαθητές, ο Πάνος και η Μαρία αρχίζουν να σπρώχνουν μαζί το κιβώτιο. Οι δυνάμεις που ασκούν οι μαθητές στο κιβώτιο είναι σταθερές οριζόντιες και ίδιας κατεύθυνσης. Η δύναμη που ασκεί ο Πάνος έχει μέτρο $F_{\Pi} = 200 \text{ N}$ και η δύναμη που ασκεί η Μαρία έχει μέτρο $F_M = 50 \text{ N}$. Την χρονική στιγμή t_1 , μέχρι την οποία το κιβώτιο έχει ολισθήσει 2 m πάνω στο δάπεδο, η Μαρία σταματά να σπρώχνει το κιβώτιο, ενώ ο Πάνος συνεχίζει να το σπρώχνει.

Δίνεται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του κιβωτίου και του δαπέδου $\mu = 0,4$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Α1) Να υπολογιστεί το μέτρο της τριβής μεταξύ του κιβωτίου και του δαπέδου.

Μονάδες 6

Α2) Να προσδιοριστεί η χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία η Μαρία σταμάτησε να σπρώχνει το κιβώτιο.

Μονάδες 6

Α3) Να γίνει σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα του μέτρου της ταχύτητας του κιβωτίου συναρτήσει του χρόνου από $t_0 = 0 \text{ s}$ έως $t_2 = 4 \text{ s}$.

Μονάδες 7

Α4) Να υπολογιστεί η ενέργεια που πρόσφερε ο Πάνος στο κιβώτιο, μέσω του έργου της δύναμης που του άσκησε, από την χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ έως την στιγμή t_1 , καθώς και ο ρυθμός με τον οποίο ο Πάνος προσφέρει ενέργεια στο κιβώτιο όταν πλέον το σπρώχνει μόνος του.

Μονάδες 6

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Ο υπολογισμός της τριβής T προκύπτει από την ισορροπία των δυνάμεων ως προς τον άξονα y :

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad B - N = 0, \quad \text{και} \quad B = N \quad \text{και το νόμο της τριβής,} \quad \text{άρα} \quad T = N \mu = B \mu = \mu m g \quad T = 200 \text{ N}$$

Δ2) Επειδή οι δύο δυνάμεις είναι σταθερές, οριζόντιες και της ίδιας κατεύθυνσης ισχύει:

$$\Sigma F = ma \quad \text{όπου} \quad (F_{\Pi} + F_M) - T = ma \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$a = \frac{F_{\Pi} + F_M - T}{m} \quad \text{ή} \quad a = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Η χρονική στιγμή t_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x_1 = \frac{1}{2} a t_1^2$$

Άρα

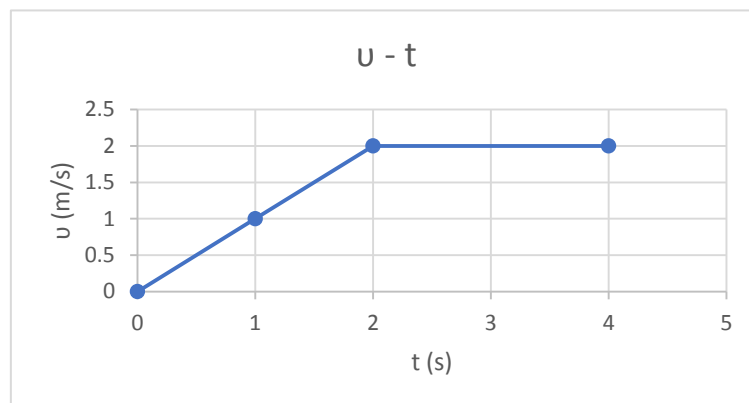
$$t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{a}} = 2 \text{ s}$$

Δ3) Διάγραμμα του μέτρου ταχύτητας του κιβωτίου συναρτήσει του χρόνου σε $\Delta t = 4 \text{ s}$, βάσει της σχέσης:

$$v = a \cdot t \quad \text{για} \quad 0 < t < t_1 \quad \text{με} \quad v_1 = a \cdot t_1 \quad \text{ή} \quad v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Για $t_1 < t < t_2$ ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \quad \text{οπότε} \quad v = \text{σταθ.} \quad \text{ή} \quad v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Δ4) Η ενέργεια που προσέφερε ο Πάνος από 0 έως t_1 ισούται με:

$$W_{\Pi} = F_{\Pi} \cdot x_1$$

Όπου $x_1 = 2 \text{ m}$ και $F_{\Pi} = 200 \text{ N}$, άρα:

$$W_{\Pi} = 400 \text{ J}$$

Ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρει ο Πάνος ενέργεια στο κιβώτιο όταν πλέον το σπρώχνει μόνος του:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = F \cdot v_1, \quad \text{άρα} \quad P_{F\Pi} = F_{\Pi} \cdot v_1 \quad \text{ή} \quad P_{F\Pi} = 400 \frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

ΘΕΜΑ Α

Ένα κιβώτιο μάζας $m = 20 \text{ kg}$ ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο, στην θέση $x_0 = 0 \text{ m}$ του άξονα $x'x$. Την χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ αρχίζει να ασκείται στο κιβώτιο σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}_1$ μέτρου $F_1 = 20 \text{ N}$, η οποία έχει τη διεύθυνση του άξονα $x'x$ και φορά τη θετική φορά του άξονα. Την χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$, κατά την οποία το κιβώτιο βρίσκεται στη θέση x_1 , καταργείται η δύναμη $\vec{F}_1$ και αρχίζει να ασκείται στο κιβώτιο μια σταθερή δύναμη μέτρου $F_2 = 40 \text{ N}$, ίδιας κατεύθυνσης με την $\vec{F}_1$.

Δ1) Να κατασκευάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση του μέτρου της επιτάχυνσης του κιβωτίου συναρτήσει του χρόνου από $t_0 = 0 \text{ s}$ έως $t_2 = 4 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Δ2) Να προσδιορίσετε την θέση x_1 , όπου καταργήθηκε η δύναμη $\vec{F}_1$ και άρχισε να ασκείται η $\vec{F}_2$.

Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του κιβωτίου την χρονική στιγμή $t_2 = 4 \text{ s}$.

Μονάδες 7

Δ4) Να υπολογίσετε την μέση ταχύτητα του κιβωτίου στο χρονικό διάστημα από $t_0 = 0 \text{ s}$ έως $t_2 = 4 \text{ s}$.

Μονάδες 6

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το κιβώτιο κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, εφαρμόζονται οριζόντιες δυνάμεις F_1 και F_2 και ισχύει ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα:

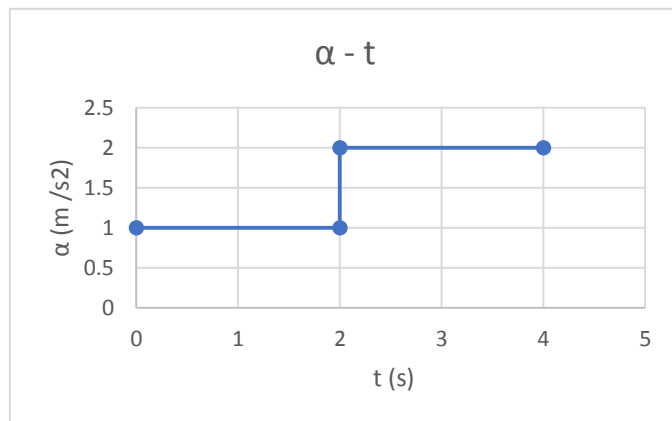
$$\Sigma F = m \cdot a$$

Για το χρονικό διάστημα $\Delta t = 2$ s, (από $t_0 = 0$ s έως $t_2 = 2$ s):

$$a_1 = \frac{F_1}{m}, \text{ δηλαδή } a_1 = 1 \frac{m}{s^2}.$$

Για το χρονικό διάστημα $\Delta t = 2$ s, (από $t_0 = 2$ s έως $t_2 = 4$ s):

$$a_2 = \frac{F_1 + F_2}{m}, \text{ δηλαδή } a_2 = 2 \frac{m}{s^2}.$$



Δ2) Η θέση x_1 όπου καταργήθηκε η δύναμη $\vec{F}_1$ για $t_1 = 2$ s δίνεται από τη σχέση:

$$x_1 = \frac{1}{2} a \cdot t_1^2 \text{ δηλαδή } x_1 = 2 \text{ m}$$

Δ3) Η ταχύτητα v_2 για $t_2 = 4$ s υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v = v_0 + a_1 \Delta t$$

όπου $\Delta t = 2$ s, και $v_0 = a_1 \Delta t = 2$ m/s άρα $v_2 = 2 + 2 \cdot 2$ ή $v_2 = 6$ m

Η κινητική ενέργεια του κιβωτίου την χρονική στιγμή $t_2 = 4$ s είναι:

$$K_{t_2} = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 \text{ δηλαδή } K_{t_2} = 360 \text{ J}$$

Δ4) Ο υπολογισμός της μέσης ταχύτητας του κιβωτίου στο χρονικό διάστημα $t_0 = 0$ s έως $t_2 = 4$ s

Η μέση ταχύτητα είναι:

$$v_\mu = \frac{\Delta x_{ολ}}{\Delta t_{ολ}} \quad \text{ή} \quad v_\mu = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_{ολ}} \quad (1) \quad \Delta t_{ολ} = 4 \text{ s}$$

όπου $\Delta x_1 = 2$ m για $t = 2$ s

$$\Delta x_2 = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_2 \cdot (\Delta t)^2, \text{ όπου } v_0 = 2 \frac{m}{s} \text{ και } \Delta t = t_2 - t_1 \text{ ή } \Delta t = 4s - 2s \text{ ή}$$

$$\Delta t = 2 \text{ s} \text{ και } \Delta x_2 = 8 \text{ m}$$

Για $\Delta t_{ολ} = 4$ s και από τη σχέση (1), η μέση ταχύτητα είναι:

$$v_\mu = 2,5 \frac{m}{s}.$$

ΘΕΜΑ Α

Μαθητής σπρώχνει ένα κιβώτιο με βιβλία μάζας $m_1 = 50 \text{ kg}$ ασκώντας σε αυτό σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 200 N . Το κιβώτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω στο δάπεδο του διαδρόμου του σχολείου του. Κατόπιν ο μαθητής αφαιρεί βιβλία και η μάζα του κιβωτίου γίνεται πλέον $m_2 = 40 \text{ kg}$. Στη συνέχεια αρχίζει πάλι να σπρώχνει το κιβώτιο ξεκινώντας από την ηρεμία και ασκώντας πάλι την ίδια σταθερή δύναμη $\vec{F}$.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Δ1) Να υπολογίσετε το μέτρο της τριβής που ασκείται στο κιβώτιο μάζας $m_1 = 50 \text{ kg}$, καθώς και τον συντελεστή τριβής μεταξύ κιβωτίου και δαπέδου.

Μονάδες 6

Για τα πρώτα δύο δευτερόλεπτα της κίνησης του κιβωτίου μάζας $m_2 = 40 \text{ kg}$, να υπολογίσετε:

Δ2) το μέτρο της τριβής μεταξύ κιβωτίου και δαπέδου καθώς και το διάστημα που διανύει το κιβώτιο.

Μονάδες 7

Δ3) το έργο της τριβής.

Μονάδες 6

Δ4) την ενέργεια που πρόσφερε ο μαθητής στο κιβώτιο και το ποσό αυτής που έγινε κινητική ενέργεια.

Μονάδες 6

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Το κιβώτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω στο δάπεδο του διαδρόμου του σχολείου, άρα

$$\Sigma \vec{F}=0 \text{ δηλαδή } F - T = 0 \text{ άρα } F = T = 200 \text{ N επίσης } T = \mu \cdot N \text{ ή } T = \mu \cdot B \text{ ή } T = \mu \cdot m \cdot g$$

Ο συντελεστής τριβής:

$$\mu = \frac{T}{m \cdot g} \text{ άρα } \mu = 0,4$$

Δ2) Για τα πρώτα 2 s της κίνησης του κιβωτίου, μάζας $m_2 = 40 \text{ Kg}$ του οποίου ασκείται δύναμη $\vec{F}$, το νέο μέτρο της τριβής είναι:

$$T_2 = \mu \cdot N_2 \text{ ή } T_2 = \mu \cdot B \text{ ή } T_2 = \mu \cdot m_2 \cdot g \text{ ή } T_2 = 160 \text{ N}$$

$$F_2 - T_2 = m_2 \cdot a, \text{ άρα } a = 1 \frac{m}{s^2}$$

Η μετατόπιση που διανύει το κιβώτιο για $\Delta t = 2 \text{ s}$

$$x = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \text{ ή } x = 2 \text{ m}$$

Δ3) Το έργο τριβής για $x = 2 \text{ m}$ είναι:

$$W_T = - T_2 \cdot x \text{ ή } W_T = - 320 \text{ J}$$

Δ4) Η ενέργεια που προσέφερε ο μαθητής στο κιβώτιο:

$$W = F \cdot x \text{ ή } W = 400 \text{ J}$$

Η ταχύτητα του κιβωτίου στο χρονικό διάστημα $\Delta t = 2 \text{ s}$:

$$v = a \cdot \Delta t \text{ ή } v = 2 \frac{m}{s}$$

Άρα η κινητική ενέργεια K του κιβωτίου είναι:

$$K = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \text{ ή } K = 80 \text{ J}$$

ΘΕΜΑ Δ

Μικρό σφαιρίδιο μάζας $m = 2 \text{ Kg}$ αφήνεται από ύψος $h = 10 \text{ m}$ να εκτελέσει ελεύθερη πτώση.

$$\text{Δίνεται } g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Δ1) Σε ποιο ύψος η δυναμική ενέργεια του σφαιριδίου (U) είναι ίση με την κινητική του (K).

Μονάδες 5

Δ2) Ποια η ταχύτητα του σφαιριδίου τη στιγμή που η δυναμική του ενέργεια (U) είναι ίση με την κινητική του (K).

Μονάδες 6

Δ3) Έστω $t_{\text{ολικο}}$ το συνολικό χρονικό διάστημα για να φτάσει το σφαιρίδιο στο έδαφος και t_E το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που άρχισε να κινείται μέχρι τη στιγμή που η δυναμική του ενέργεια θα γίνει ίση με την κινητική του.

Να υπολογιστεί ο λόγος: $\frac{t_{\text{ολικο}}}{t_E}$.

Μονάδες 7

Δ4) Να γίνουν στο ίδιο διάγραμμα σε βαθμολογημένους άξονες, οι γραφικές παραστάσεις $U=U(y)$, $K=K(y)$ και $E=E(y)$ όπου y η απόσταση του σφαιριδίου από το έδαφος και E_{μ} η μηχανική ενέργεια του σφαιριδίου.

Μονάδες 7

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.), από την αρχική θέση, όπου $U = m \cdot g \cdot h$, μέχρι τη στιγμή που $U = K$ (1), στο ύψος h_1 .

Ισχύει:

$$U + K = E,$$

και από τη σχέση (1) προκύπτει

$$2U = E \text{ ή } 2 m \cdot g \cdot h_1 = m \cdot g \cdot h \text{ και } h_1 = 5 \text{ m}$$

Δ2) Εφόσον

$$U = K \quad (2)$$

$$m \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 \quad \text{ή} \quad v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}$$

άρα το μέτρο της ταχύτητας είναι:

$$v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δ3) Εφόσον $t_{\text{ολικό}}$ είναι το συνολικό διάστημα που φτάνει το σφαιρίδιο στο έδαφος, στο ύψος $h = 10 \text{ m}$, και t_E το χρονικό διάστημα μέχρι $U = K$, στο ύψος $h_1 = 5 \text{ m}$, ισχύει:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t_{\text{ολικό}}^2 \quad (3)$$

$$h_1 = \frac{1}{2} g t_E^2 \quad (4)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4)

$$\frac{h}{h_1} = \frac{t_{\text{ολικό}}^2}{t_E^2} \quad \text{ή} \quad \frac{t_{\text{ολικό}}}{t_E} = \sqrt{2}$$

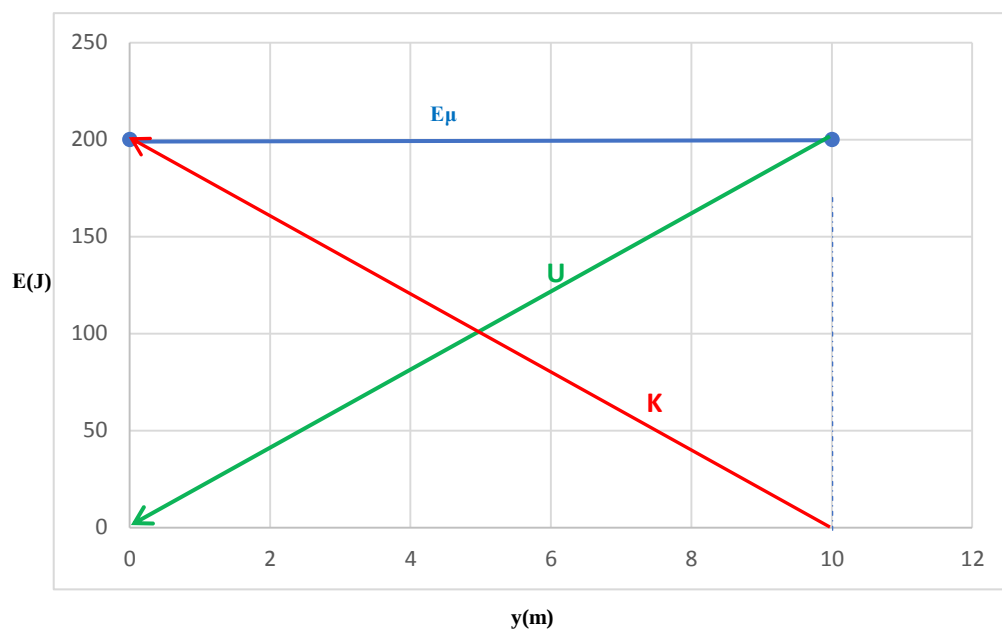
Δ4) Γραφικές παραστάσεις $U = U(y)$, $K = K(y)$, $E = E(y)$

Η μηχανική ενέργεια του σφαιριδίου είναι: $E = m \cdot g \cdot h =$ ή $E=200 \text{ J}$ ή $E=$ σταθερή

Η δυναμική ενέργεια του σφαιριδίου είναι: $U = m \cdot g \cdot y$ ή $U = 20 y$

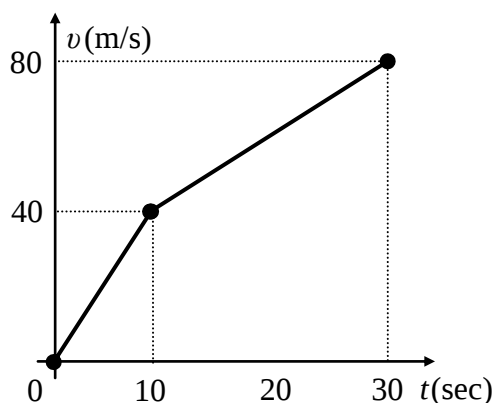
Η κινητική ενέργεια του σφαιριδίου είναι: $K = E - U$ ή $K = 200 - 20 y$ με $0 \leq y \leq 10 \text{ m}$

Το διάγραμμα απεικονίζεται παρακάτω:



ΘΕΜΑ Δ

Ένα σώμα μάζας 20 Kg κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το διάγραμμα της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα 0 s - 30 s φαίνεται στο σχήμα.



Δ1) Να υπολογιστεί η συνολική μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα 0 s - 30 s.

Μονάδες 6

Δ2) Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Χρονικό διάστημα (s)	Συνισταμένη οριζόντια δύναμη που ασκείται στο σώμα (N)
0-10	
10-30	

Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογιστεί το έργο της συνισταμένης οριζόντιας δύναμης τα χρονικά διαστήματα 0 s - 10 s, και 10 s - 30 s.

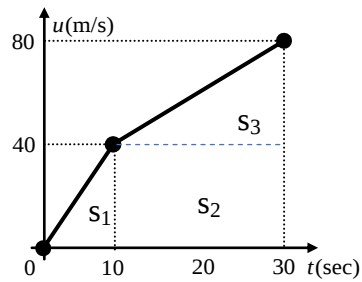
Μονάδες 6

Δ4) Με βάση τα αποτελέσματα του ερωτήματος (Δ3) να επαληθεύσετε το «Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας – Έργου».

Μονάδες 7

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Η συνολική μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα 0 s – 30 s υπολογίζεται από το εμβαδόν του διαγράμματος:



$$S_{ολ} = S_1 + S_2 + S_3 \quad \text{ή} \quad S_{ολ} = \frac{1}{2} 40 \cdot 10 + \frac{40 + 80}{2} \cdot 20 \quad \text{ή} \quad S_{ολ} = 1400 \, m$$

Δ2) Οι τιμές του πίνακα υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \alpha_1 = \frac{40 - 0 \, m}{10 - 0 \, s^2} \quad \text{ή} \quad \alpha_1 = 4 \frac{m}{s^2}$$

$$F_1 = m \cdot \alpha_1 \quad \text{ή} \quad F_1 = 20 \cdot 4 \, N \quad \text{ή} \quad F_1 = 80 \, N$$

$$\alpha_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \alpha_2 = \frac{80 - 40 \, m}{30 - 10 \, s^2} \quad \text{ή} \quad \alpha_2 = 2 \frac{m}{s^2}$$

$$F_2 = m \cdot \alpha_2 \quad \text{ή} \quad F_2 = 20 \cdot 2 \, N \quad \text{ή} \quad F_2 = 40 \, N$$

Χρονικό διάστημα (s)	Συνισταμένη οριζόντια δύναμη που ασκείται στο σώμα (N)
0-10	80
10-30	40

Δ3) Το έργο υπολογίζεται:

$$W_{0s-10s} = F_1 \cdot x_{0s-10s},$$

όπου

$$x_{0s-10s} = \frac{1}{2} a_1 \cdot (0 - 10)^2 \quad (SI) \quad \text{ή} \quad x_{0s-10s} = 200 \, m$$

$W_{10s-30s} = F_1 x_{10-30}$, όπου

$$x_{10s-30s} = x_0 + \frac{1}{2} a_2 (30 - 10)^2 \quad \text{ή}$$

$$x_{10s-30s} = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a_2 \cdot 20^2 \quad (SI)$$

Όπου

$$v_o = 40 \frac{m}{s} \text{ από το διάγραμμα } v - t.$$

$$x_{0s-10s} = x_0 + \frac{1}{2} a_2 \cdot (30 - 10)^2 \text{ (SI)} \quad \text{ή} \quad x_{0s-10s} = 40 \cdot 20 + \frac{1}{2} 40 \cdot 20^2 \text{ m} \quad \text{ή}$$

$$x_{0s-10s} = 1200 \text{ m}$$

άρα

$$W_{0s-10s} = 80 \cdot 200 \text{ J} \quad \text{ή} \quad W_{0s-10s} = 16000 \text{ J}$$

$$W_{10s-30s} = 40 \cdot 1200 \text{ J} \quad \text{ή} \quad W_{10s-30s} = 48000 \text{ J}$$

Δ4) Για το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας – Έργου (Θ.Μ.Κ.Ε.) ισχύει:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{\text{ολ}}$$

$$K_{\text{τελ}} - 0 = W_{\text{ολ}}$$

όπου από τη Δ2

$$W_{\text{ολ}} = W_{0s-10s} + W_{10s-30s} \quad \text{ή} \quad W_{\text{ολ}} = 1600 \text{ J} + 48000 \text{ J} \quad \text{ή} \quad W_{\text{ολ}} = 64000 \text{ J}$$

$$\text{και } K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} m \cdot v_{\text{τελ}}^2$$

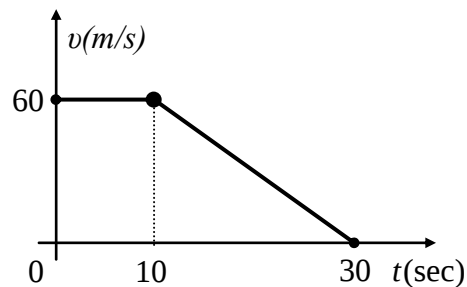
όπου

$$v_{\text{τελ}} = 80 \frac{m}{s} \text{ όπως δίνεται από το διάγραμμα } v - t.$$

$$K_{\text{τελ}} = 64000 \text{ J} \text{ άρα ισχύει το Θ.Μ.Κ.Ε.}$$

ΘΕΜΑ Α

Ένα σώμα μάζας 2 Kg κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το διάγραμμα της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα 0 s - 30 s φαίνεται στο σχήμα.



Δ1) Να υπολογιστεί η συνολική μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα 0 s - 30 s.

Μονάδες 6

Δ2) Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Χρονικό διάστημα (s)	Συνισταμένη οριζόντια δύναμη που ασκείται στο σώμα (N)
0-10	
10-30	

Μονάδες 6

Δ3) Να υπολογιστεί το έργο της συνισταμένης οριζόντιας δύναμης τα χρονικά διαστήματα 0 s - 10 s, και 10 s - 30 s.

Μονάδες 6

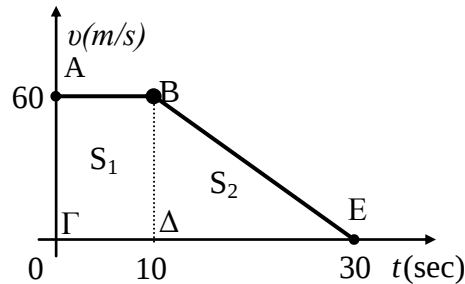
Δ4) Με βάση τα αποτελέσματα του ερωτήματος (Δ3) να επαληθεύσετε το «Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας – Έργου».

Μονάδες 7

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Από τη γραφική παράσταση $v - t$, υπολογίζουμε το εμβαδόν S_1 του τετραγώνου (ΑΒΓΔ) και το εμβαδόν S_2 του τριγώνου (ΒΔΕ):

$$\Delta x_{ολ} = S_1 + S_2 \quad \text{ή} \quad \Delta x_{ολ} = 60 \cdot 10 \text{ m} + \frac{1}{2} 20 \cdot 60 \text{ m} \quad \text{ή} \quad \Delta x_{ολ} = 1200 \text{ m}$$



Δ2) Για τον υπολογισμό των τιμών του πίνακα:

Για το χρονικό διάστημα 0s - 10 s:

$$\alpha_1 = 0 \frac{m}{s^2}, \quad F_1 = 0 \text{ N}$$

Για το χρονικό διάστημα 10s - 30 s:

$$\alpha_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \alpha_2 = -3 \frac{m}{s^2}, \quad F_2 = m \cdot a \quad \text{ή} \quad F_2 = -6 \text{ N}$$

Χρονικό διάστημα (s)	Συνισταμένη οριζόντια δύναμη που ασκείται στο σώμα (N)
0-10	0
10-30	-6

Δ3) Για τον υπολογισμό του έργου:

$$W_{0s-10s} = F_1 \cdot x_{0s-10s} \quad \text{ή} \quad W_{0s-10s} = 0 \text{ J}$$

$$W_{10-30} = F_2 \cdot x_{10-30}$$

όπου

$$x_{10s-30s} = \frac{1}{2} a_2 \cdot \Delta t_{30s-10s}^2 \quad \text{ή} \quad x_{10s-30s} = 600 \text{ m}, \quad W_{10-30} = -3600 \text{ J}$$

άρα

$$W_{ολ} = 0 \text{ J} - 3600 \text{ J} \quad \text{ή} \quad W_{ολ} = -3600 \text{ J}$$

Δ4) Για το Θ.Μ.Κ.Ε. ισχύει:

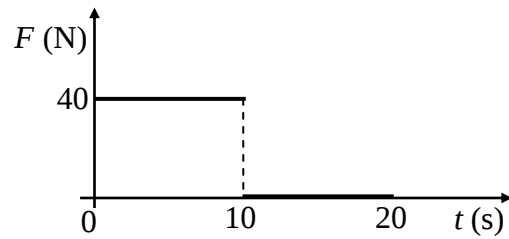
$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{ολ}$$

$$0 - K_{αρχ} = -\frac{1}{2} 2 \cdot 60^2 \text{ J} \quad \text{ή} \quad K_{τελ} - K_{αρχ} = -3600 \text{ J}$$

δηλαδή ίσο με το $W_{ολ}$ όπως υπολογίστηκε στο Δ3.

ΘΕΜΑ Δ

Μικρό σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο δάπεδο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και δαπέδου είναι $\mu = 0,4$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ που η τιμή της μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και ότι η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα



Δ1) Να σχεδιάσετε σε αυστηρά βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα επιτάχυνσης - χρόνου ($a-t$) για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 20 \text{ sec}$.

Μονάδες 6

Δ2) Να σχεδιάσετε σε αυστηρά βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου ($v-t$) για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 20 \text{ sec}$.

Μονάδες 7

Δ3) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης F για το χρονικό διάστημα $0 \rightarrow 10 \text{ sec}$.

Μονάδες 6

Δ4) Να υπολογίσετε το έργο της τριβής για το χρονικό διάστημα $10 \rightarrow 20 \text{ sec}$.

Μονάδες 6

Ενδεικτική Λύση

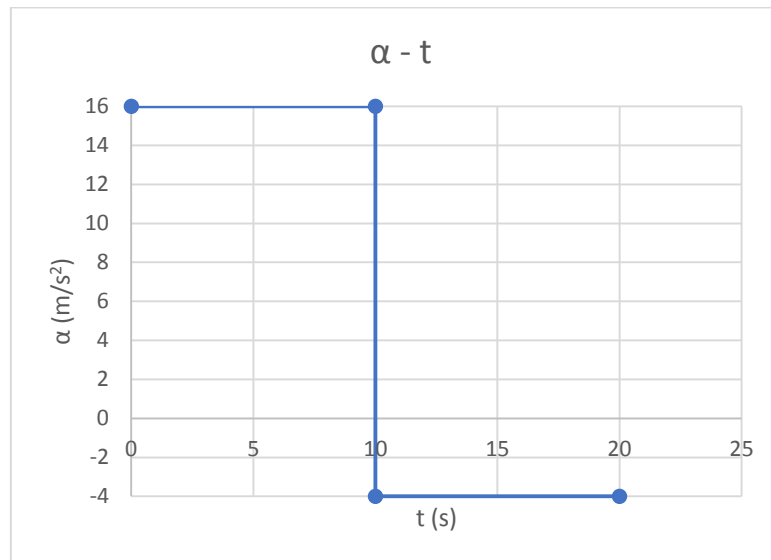
Δ1) Σχεδίαση $a - t$ για $0 - 20 \text{ s}$

$$\Sigma F = m \cdot a$$

$$F - T = m \cdot a \quad \text{όπου } T = \mu \cdot N \quad \text{ή} \quad T = \mu \cdot B \quad \text{ή} \quad T = \mu \cdot m \cdot g \quad \text{ή} \quad T = 8 \text{ N}$$

$$\text{Για } \Delta t_1 = 10\text{s} - 0\text{s} \quad \text{ή} \quad \Delta t_1 = 10 \text{ s}, \quad a_{0\text{s}-10\text{s}} = \frac{F-T}{m} \quad \text{ή} \quad a_{0\text{s}-10\text{s}} = \frac{40-8}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{ή} \quad a_{0\text{s}-10\text{s}} = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

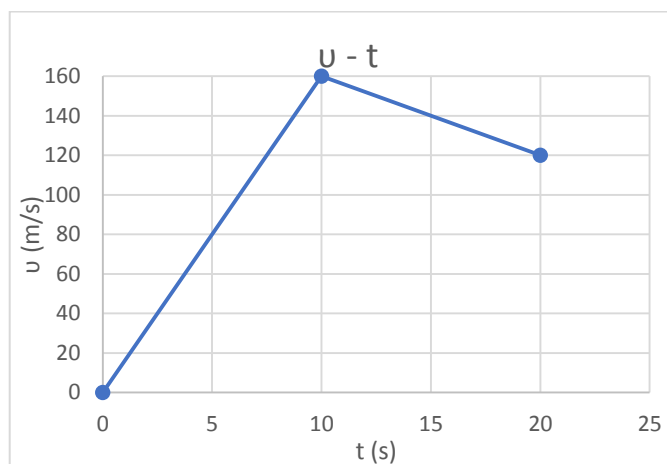
$$\text{Για } \Delta t_2 = 20\text{s} - 10\text{s} \quad \text{ή} \quad \Delta t_2 = 10 \text{ s}, \quad a_{20\text{s}-10\text{s}} = \frac{F-T}{m} \quad \text{ή} \quad a_{20\text{s}-10\text{s}} = \frac{0-8}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{ή} \quad a_{20\text{s}-10\text{s}} = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



Δ2) Διάγραμμα $v - t$

$$v_{0\text{s}-10\text{s}} = a_{0\text{s}-10\text{s}} \cdot \Delta t_1 \quad \text{ή} \quad v_{0\text{s}-10\text{s}} = 160 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{20\text{s}-10\text{s}} = v_{0\text{s}-10\text{s}} - a_{20\text{s}-10\text{s}} \cdot \Delta t_2 \quad \text{ή} \quad v_{20\text{s}-10\text{s}} = 120 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



t= 0s	υ =0 $\frac{m}{s}$
t= 10s	υ =160 $\frac{m}{s}$
t = 20s	υ =120 $\frac{m}{s}$

Δ3) Το έργο της δύναμης για διάρκεια $0\text{s} - 10 \text{ s}$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$W_F = F \cdot \Delta x$$

όπου

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_{0\text{s}-10\text{s}} \cdot \Delta t_{0\text{s}-10\text{s}}^2 \quad \text{ή} \quad \Delta x = 800 \text{ m}$$

άρα

$$W_F = 32000 \text{ J}$$

Δ4) Το έργο τριβής $\vec{T}$ για το χρονικό διάστημα 10s – 20 s υπολογίζεται από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε.:

Ισχύει :

$$\Delta K = W_{ολ}$$

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_F + W_T$$

όπου $W_F = 0$ διότι στο χρονικό διάστημα $\Delta t = 20s - 10s$ ή $\Delta t = 10s$ $F = 0N$.

Επομένως:

$$\frac{1}{2} m v_{20s}^2 - \frac{1}{2} m v_{10s}^2 = -11200 J$$

ΘΕΜΑ Δ

Μικρή σφαίρα μάζας $m = 5 \text{ kg}$ βρίσκεται σε ύψος $h = 180 \text{ m}$ πάνω από το έδαφος. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αφήνεται να πέσει εκτελώντας ελεύθερη πτώση.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και ότι η επίδραση του αέρα είναι αμελητέα.

Να υπολογίσετε:

Δ1) Το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας τη χρονική στιγμή που φθάνει στο έδαφος.

Μονάδες 6

Δ2) Το διάστημα που διανύει η σφαίρα στη διάρκεια του 3^{ου} δευτερολέπτου της κίνησής της.

Μονάδες 7

Δ3) Το έργο του βάρους της σφαίρας από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή που η κινητική της ενέργεια γίνεται ίση με 6250 J .

Μονάδες 6

Δ4) Ο μέσος ρυθμός παραγωγής έργου ($P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$) από το βάρος της σφαίρας από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή που φθάνει στο έδαφος.

Μονάδες 6

Ενδεικτική Λύση

Δ1) Από την εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας προκύπτει:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ}$$

$$0 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + 0$$

$$\text{άρα } v = \sqrt{2g \cdot h} \quad \text{ή} \quad v = 60 \frac{m}{s}$$

Δ2) Το διάστημα από 0 – 3 δευτερόλεπτα:

$$\Delta y_{0s-3s} = \frac{1}{2} g \cdot 3^2 \quad (SI) \quad \text{ή} \quad \Delta y_{0s-3s} = 45 \, m$$

Για το διάστημα από 0 – 2 δευτερόλεπτα

$$\Delta y_{0s-2s} = \frac{1}{2} g \cdot 2^2 \quad (SI) \quad \text{ή} \quad \Delta y_{0s-2s} = 20 \, m$$

$$\Delta y = 45m - 20m \quad \text{ή} \quad \Delta y = 25 \, m$$

Δ3) Από την εφαρμογή της Α.Δ.Μ.Ε. για ύψος h_1 όπου $K = 6250 \, J$

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{h1} + U_{h1}$$

$$0 + m \cdot g \cdot h = K + m \cdot g \cdot h_1$$

$$h_1 = 55 \, m$$

Επομένως το έργο του βάρους είναι:

$$W = m \cdot g \cdot h_1 \quad \text{ή} \quad W = 6250 \, J$$

Εναλλακτική λύση:

Από

$$K = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad \text{ή} \quad K = \frac{1}{2} m \cdot g^2 \cdot t_1^2,$$

και αφού υπολογισθεί το t_1

και από τη σχέση:

$$h_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 \quad \text{ή} \quad h_1 = 125 \, m$$

υπολογίζουμε το

$$W = m \cdot g \cdot h_1 \quad \text{ή} \quad W = 6250 \, J$$

Δ4) Η χρονική διάρκεια της ελεύθερης πτώσης

$$h = \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2 \quad \text{όπου } h = 360 \text{ m}$$

$$\Delta t = 6 \text{ s}$$

Ο μέσος ρυθμός παραγωγής έργου του βάρους του σώματος από την αρχή μέχρι να φτάσει στο έδαφος, για $\Delta t = 6 \text{ s}$:

Ρυθμός παραγωγής:

$$P = \frac{m \cdot g \cdot h}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad P = 1500 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$