

ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

23^H ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ



Κυριακή, 5 Απριλίου 2009

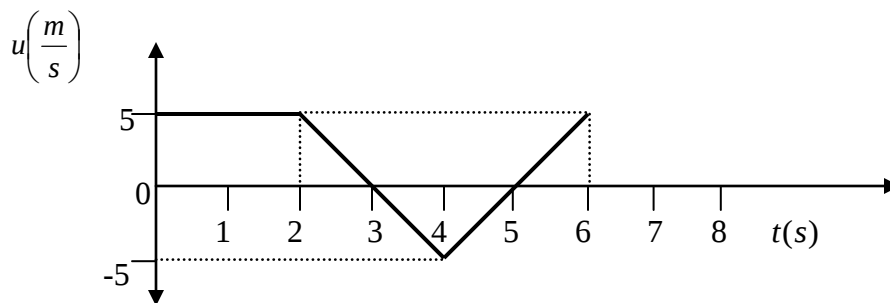
Ωρα : 10:00 - 13:00

Οδηγίες:

- 1) Το δοκίμιο αποτελείται από επτά (7) θέματα.
- 2) Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
- 3) Επιτρέπεται η χρήση μόνο μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- 4) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- 5) Να γράφετε με μελάνι χρώματος μπλε.
- 6) Να εκφράζετε τις απαντήσεις σας, όπου χρειάζεται, με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.
- 7) Η επιτάχυνση της Βαρύτητας είναι $g = 10 \frac{m}{s^2}$

ΘΕΜΑ 1^ο (16 μονάδες)

Κινητό εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση και το διάγραμμα της ταχύτητας με το χρόνο φαίνεται πιο κάτω.

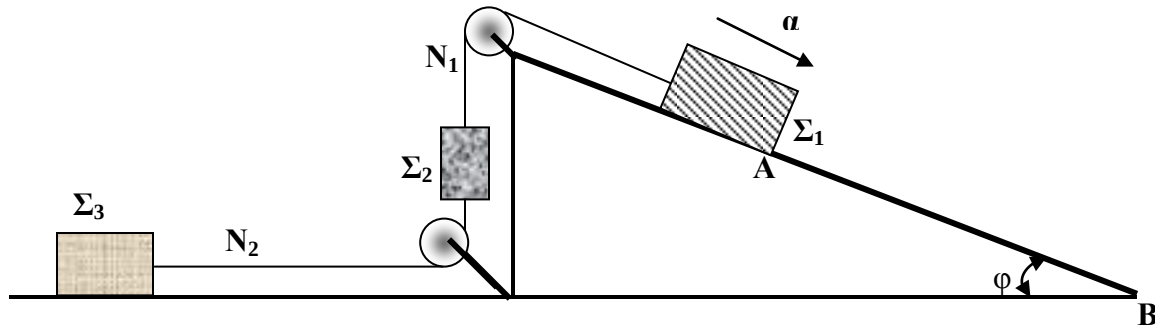


Τη χρονική στιγμή $t=0$ s το κινητό βρίσκεται στη θέση $X_0 = -5m$

(α) Να γίνει σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα της επιτάχυνσης a και του χρόνου t για το χρονικό διάστημα από 0 s έως και 6s. (5 μονάδες)

- (β) Να γίνει σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα της θέσης X του κινητού και του χρόνου t για το χρονικό διάστημα από 0 s έως και 6 s. (5 μονάδες)
 (γ) Να υπολογιστεί το διάστημα που διάνυσε το κινητό για το χρονικό διάστημα από 0 s έως και 6 s. (3 μονάδες)
 (δ) Να υπολογιστεί το μέτρο της μετατόπισης του κινητού για το χρονικό διάστημα από 0 s έως και 6 s. (3 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2⁰ (15 μονάδες)



- Στο σχήμα το Σ_1 μάζας $m_1 = 2\text{Kg}$ κινείται προς τα κάτω, χωρίς τριβή, με επιτάχυνση $a = 1\frac{m}{s^2}$. Το Σ_2 έχει μάζα $m_2 = 0,5\text{Kg}$. Το Σ_3 κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τα νήματα N_1 και N_2 που συνδέουν τα τρία σώματα είναι αβαρή και μη εκτατά και οι δύο τροχαλίες είναι λείες.
 Η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου είναι $\phi = 37^\circ$. ($\eta\mu 37^\circ = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu 37^\circ = 0,8$)
 (α) Να υπολογίσετε τις τάσεις S_1 και S_2 που αναπτύσσονται στα νήματα N_1 και N_2 αντίστοιχα. (6 μονάδες)
 (β) Να υπολογίσετε τη μάζα m_3 του σώματος Σ_3 . (5 μονάδες)

Το νήμα N_1 κόβεται μετά από 2s από τη στιγμή που το σύστημα άρχισε να κινείται.

(γ) Να βρεθούν:

- (i) Το διάστημα που θα καλύψει το Σ_2 κινούμενο προς τα πάνω, από τη στιγμή που κόβεται το N_1 , μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του. (2 μονάδες)
 (ii) Το διάστημα που θα καλύψει το Σ_3 στο ίδιο χρονικό διάστημα. (2 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3⁰(16 μονάδες)

Από την ταράτσα πολυκατοικίας αφήνεται μπάλα να εκτελέσει ελεύθερη πτώση όπως φαίνεται στο σχήμα. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Τα διάφορα ύψη στο διάγραμμα δεν είναι υπό κλίμακα.

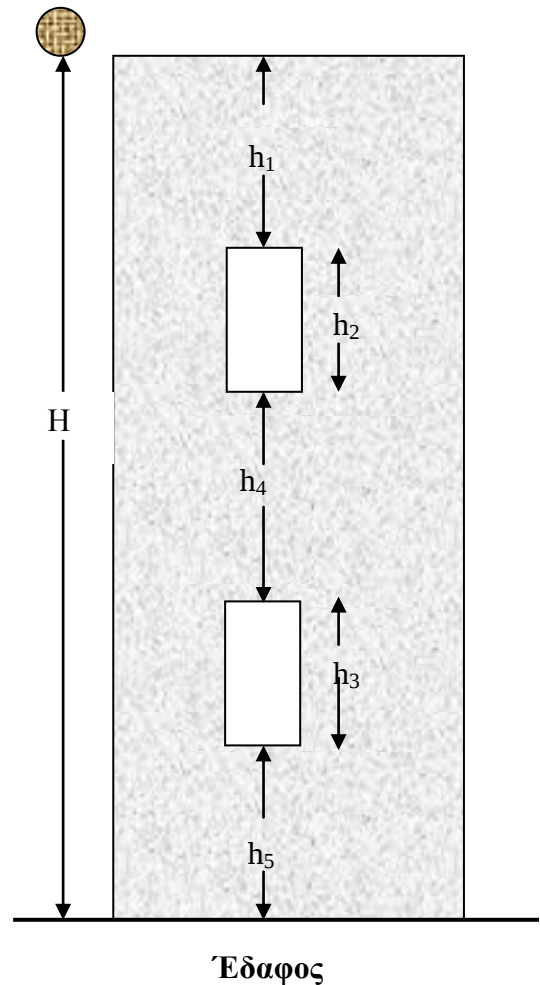
Το ύψος των δύο παραθύρων είναι $h_2 = h_3 = 2m$ και το ύψος $h_5 = 3m$.

Ο χρόνος που κάνει η μπάλα για να διανύσει το ύψος h_2 είναι $t_2 = 0,4s$ και ο χρόνος που κάνει για να διανύσει το ύψος h_3 είναι $t_3 = 0,15s$.

A. Να υπολογίσετε:

- (α) Τα ύψη h_1, h_4 και H . (6 μονάδες)
- (β) Το χρόνο που χρειάζεται το σώμα για να διανύσει την απόσταση H . (4 μονάδες)
- (γ) Την ταχύτητα με την οποία η μπάλα συναντά το έδαφος. (2 μονάδες)

B. Να γίνει σε βαθμολογημένους άξονες η γραφική παράσταση του ύψους h της μπάλας από το έδαφος σε σχέση με το χρόνο t , από τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερη μέχρι που να συναντήσει το έδαφος. (4 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 4⁰(10 μονάδες)**

Δύο όμοια αυτοκίνητα A, B (ίδιο μοντέλο, ίδια μάζα) κινούνται το ένα προς το άλλο. Το A κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $u_A = 20 \frac{Km}{h}$ και το B με σταθερή

ταχύτητα μέτρου $u_B = 80 \frac{Km}{h}$. Σε κάποια χρονική στιγμή συγκρούονται μετωπικά.

(α) Αν F_1 είναι το μέτρο της δύναμης που ασκεί το B στο A και F_2 είναι το μέτρο της δύναμης που ασκεί το A πάνω στο B, κατά τη στιγμή της σύγκρουσης, ποια από τις πιο κάτω σχέσεις είναι ορθή;

- (i) $F_1 = F_2$ (ii) $F_1 > F_2$ (iii) $F_1 < F_2$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας (5 μονάδες)

(β) Αν Δu_A είναι το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας του αυτοκινήτου Α και Δu_B είναι το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας του αυτοκινήτου Β κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης, ποια από τις πιο κάτω σχέσεις είναι η ορθή;

(i) $\Delta u_A = \Delta u_B$ (ii) $\Delta u_A < \Delta u_B$ (iii) $\Delta u_A > \Delta u_B$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 5^ο (15 μονάδες)

Σφαίρα βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω με

αρχική ταχύτητα $u_0 = 20 \frac{m}{s}$ από την κορυφή κτηρίου

ύψους $h = 60m$ τη χρονική στιγμή $t = 0s$.

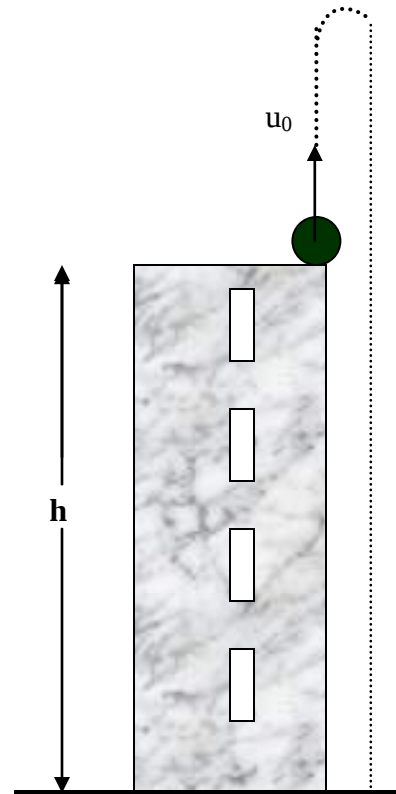
Να θεωρήσετε ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

(α) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που η σφαίρα φτάνει στο έδαφος. (4 μονάδες)

(β) Σε ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρίσκεται σε ύψος 75m πάνω από το έδαφος; (4 μονάδες)

(γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας που έχει η σφαίρα όταν αυτή βρίσκεται 35m πάνω από το έδαφος. (4 μονάδες)

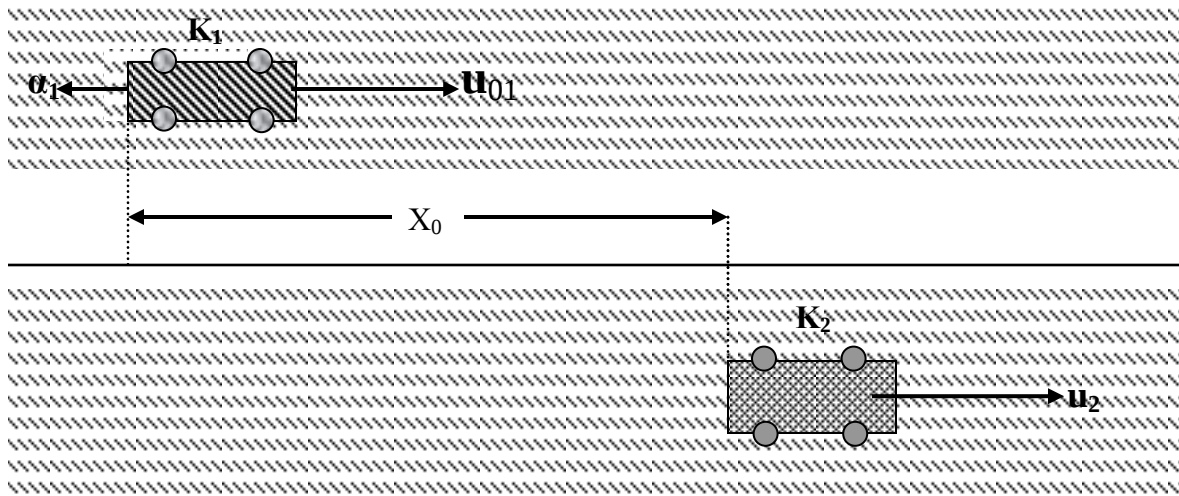
(δ) Να γίνει η γραφική παράσταση της ταχύτητας της σφαίρας και του χρόνου από τη χρονική στιγμή $t = 0s$ μέχρι τη χρονική στιγμή που φτάνει στο έδαφος. (3 μονάδες)



Έδαφος

ΘΕΜΑ 6^ο (18 μονάδες)

Δύο μοντέλα αυτοκινήτων το K_1 και το K_2 κινούνται ευθύγραμμα σε παράλληλες τροχιές όπως στο σχήμα.



Το K_1 κινείται με σταθερή επιβράδυνση μέτρου $a_1 = 0,36 \frac{m}{s^2}$.

Το K_2 κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $u_2 = 20 \frac{m}{s}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0s$

το K_1 έχει ταχύτητα μέτρου $u_{01} = 30 \frac{m}{s}$ και βρίσκεται στη θέση $X=0m$.

Την ίδια χρονική στιγμή το K_2 βρίσκεται στη θέση $X_0=50m$.

(α) Να υπολογίσετε τις θέσεις X_a, X_b που τα δύο μοντέλα αυτοκινήτων θα βρίσκονται το ένα δίπλα στο άλλο. (6 μονάδες)

(β) Να υπολογίσετε τις ταχύτητες u_a και u_b που έχει το K_1 όταν βρίσκεται δίπλα από το K_2 . (4 μονάδες)

(γ) Να υπολογίσετε την επιβράδυνση a'_1 που πρέπει να έχει το K_1 έτσι ώστε να βρεθεί δίπλα από το K_2 μια μόνο φορά. Να θεωρήσετε ότι τα μεγέθη u_2, u_{01} και X_0 παραμένουν τα ίδια όπως πιο πάνω. (4 μονάδες)

(δ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα u_1 που θα έχει το K_1 όταν θα βρίσκεται δίπλα στο K_2 στην περίπτωση του ερωτήματος (γ). (4 μονάδες)

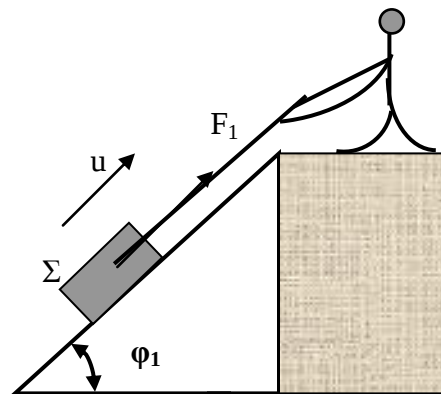
ΘΕΜΑ 7^ο (10 μονάδες)

Το σώμα Σ του σχήματος έχει βάρος 200N. Παιδί τραβά το Σ , με τη βοήθεια σχοινιού που έχει αμελητέο βάρος και είναι μη εκτατό, κατά μήκος του λείου κεκλιμένου επιπέδου, με σταθερή ταχύτητα. Η μέγιστη δύναμη F_1 που μπορεί να ασκήσει το παιδί έχει μέτρο 100N.

(α) Να υπολογίσετε τη μέγιστη γωνία ϕ_1 που μπορεί να έχει το κεκλιμένο επίπεδο έτσι ώστε το παιδί να καταφέρει να μεταφέρει το σώμα Σ προς το μέρος του με σταθερή ταχύτητα. (4 μονάδες)

(β) Να υπολογίσετε το μέτρο της αντίδρασης του κεκλιμένου επιπέδου πάνω στο σώμα Σ στην πιο πάνω περίπτωση. (3 μονάδες)

(γ) Αν η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου γίνει $\phi_2 = \frac{\phi_1}{2}$ να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης F_2 που πρέπει να ασκήσει το παιδί στο Σ για να κινηθεί κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου με σταθερή ταχύτητα. (3 μονάδες)



ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

23^Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ



Κυριακή, 5 Απριλίου 2009

Ωρα : 10:00 - 13:00

Προτεινόμενες Λύσεις

ΘΕΜΑ 1⁰

(α) Για να κάνουμε το διάγραμμα της επιτάχυνσης σαν συνάρτηση του χρόνου βρίσκουμε πρώτα την επιτάχυνση που έχει το κινητό στα διάφορα χρονικά διαστήματα της κίνησής του.

Έτσι έχουμε:

$$a_1 = \frac{\Delta u}{\Delta t} = 0 \frac{m}{s^2} \quad (\text{χρονικό διάστημα από } 0s \text{ μέχρι και } 2s) \quad (1)$$

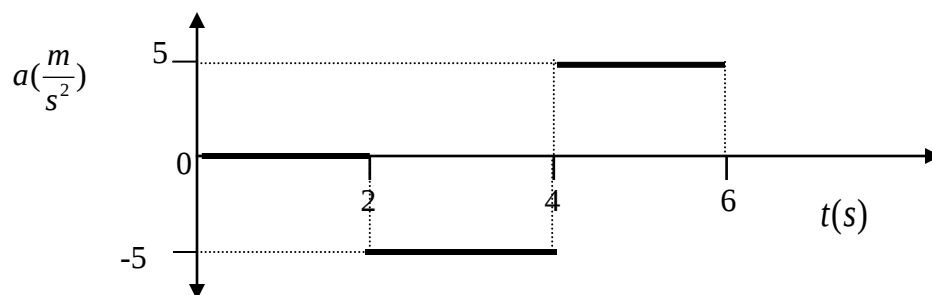
$$a_2 = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{0-5}{1} \Rightarrow a_2 = -5 \frac{m}{s^2} \quad (\text{χρονικό διάστημα από } 2s \text{ μέχρι και } 3s) \quad (2)$$

$$a_3 = a_2 = -5 \frac{m}{s^2} \quad (\text{χρονικό διάστημα από } 3s \text{ μέχρι και } 4s) \quad (3)$$

$$a_4 = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{0-(-5)}{1} \Rightarrow a_4 = 5 \frac{m}{s^2} \quad (\text{χρονικό διάστημα από } 4s \text{ μέχρι και } 5s) \quad (4)$$

$$a_5 = a_4 = 5 \frac{m}{s^2} \quad (\text{χρονικό διάστημα από } 5s \text{ μέχρι και } 6s) \quad (5)$$

Με τις τιμές της επιτάχυνσης όπως αυτές προέκυψαν από τις σχέσεις 1-5 κατασκευάζουμε το διάγραμμα $a = f(t)$



(β) Για να κάνουμε το διάγραμμα της θέσης X και του χρόνου t , υπολογίζουμε τη θέση που έχει το σώμα κινούμενο από τα 0s μέχρι και τα 6s και έχοντας υπόψη μας ότι η αρχική του θέση είναι $x_0 = -5m$.

$$\Delta x_1 = 5.2 = 10m \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x_1 = -5 + 10 \Rightarrow x_1 = 5m \quad (6)$$

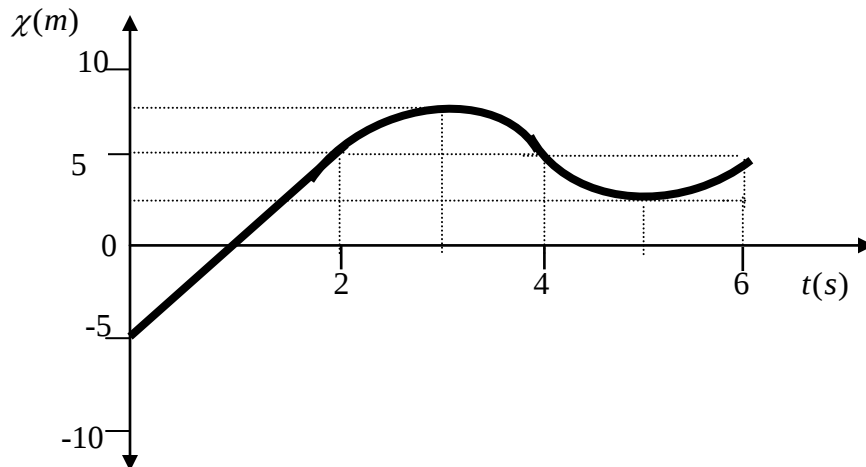
$$\Delta x_2 = \frac{5.1}{2} = 2.5m \Rightarrow x_2 = x_1 + \Delta x_2 = 5 + 2.5 \Rightarrow x_2 = 7.5m \quad (7)$$

$$\Delta x_3 = \frac{-5.1}{2} = -2.5m \Rightarrow x_3 = x_2 + \Delta x_3 = 7.5 - 2.5 \Rightarrow x_3 = 5m \quad (8)$$

$$\Delta x_4 = \frac{-5.1}{2} = -2.5m \Rightarrow x_4 = x_3 + \Delta x_4 = 5 - 2.5 \Rightarrow x_4 = 2.5m \quad (9)$$

$$\Delta x_5 = \frac{5.1}{2} = 2.5m \Rightarrow x_5 = x_4 + \Delta x_5 = 2.5 + 2.5 \Rightarrow x_5 = 5m \quad (10)$$

Με τις τιμές που προέκυψαν από τις σχέσεις 6-10 κατασκευάζουμε το διάγραμμα $x = f(t)$.



(γ) Το συνολικό διάστημα που διάνυσε το σώμα κινούμενο στο χρονικό διάστημα από 0s μέχρι 6s βρίσκεται με τη βοήθεια της σχέσης (11).

$$x_{\text{ΟΛΙΚΟ}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + |\Delta x_3| + |\Delta x_4| + \Delta x_5 = 10 + 2.5 + 2.5 + 2.5 + 2.5 \Rightarrow x_{\text{ΟΛΙΚΟ}} = 20m \quad (11)$$

(δ) Το μέτρο της μετατόπισης βρίσκεται με τη βοήθεια της σχέσης 12.

$$\Delta x = \Delta x_1 + \cancel{\Delta x_2} + \cancel{\Delta x_3} + \cancel{\Delta x_4} + \cancel{\Delta x_5} \Rightarrow \Delta x = \Delta x_1 = 10m \quad (12)$$

ΘΕΜΑ 2^ο

(α) Για να υπολογίσουμε τις τάσεις S_1 και S_2 που αναπτύσσονται στα νήματα N_1 και N_2 αντίστοιχα αναλύουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στα Σ_1 και Σ_2 .

Από το σχήμα 1 προκύπτουν οι πιο

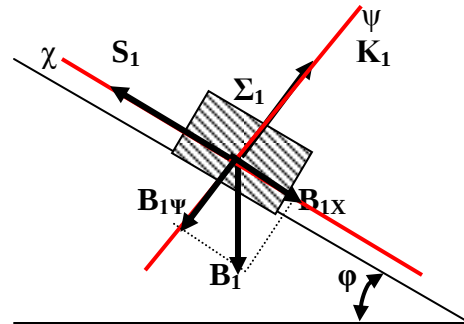
κάτω σχέσεις:

$$\Sigma F = m_1 \cdot a \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \Sigma F_x = m_1 \cdot a \Rightarrow B_{1x} - S_1 = m_1 \cdot a$$

$$\Rightarrow B_1 \cdot \eta \mu \phi - S_1 = m_1 \cdot a \Rightarrow S_1 = B_1 \cdot \eta \mu \phi - m_1 \cdot a$$

$$\Rightarrow S_1 = 20,0,6 - 2,1 = 12 - 2 \Rightarrow S_1 = 10N \quad (2)$$



Σχήμα 1

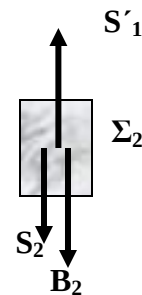
Από το σχήμα 2 προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\Sigma F = m_2 \cdot a \Rightarrow S'_1 - S_2 - B_2 = m_2 \cdot a \quad (3)$$

$$\Rightarrow S_2 = S'_1 - B_2 - m_2 \cdot a \quad (4)$$

Από τη σχέση (4) προκύπτει ότι:

$$S_2 = 10 - 5 - 0,5 \cdot 1 \Rightarrow S_2 = 4,5N \quad (5)$$



Σχήμα 2

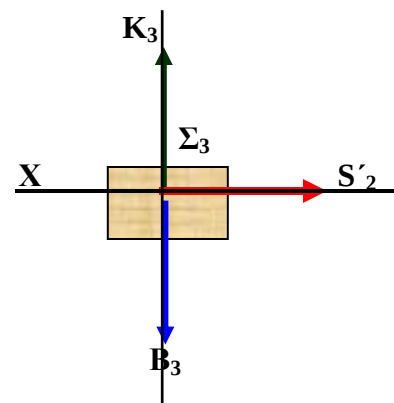
(β) Για να υπολογίσουμε τη μάζα m_3 του στερεού

Σ_3 σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα αυτό, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.

Από το σχήμα 3 προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\Sigma F = m_3 \cdot a \Rightarrow S'_2 = m_3 \cdot a \quad (6)$$

$$\Rightarrow m_3 = \frac{S'_2}{a} \Rightarrow m_3 = \frac{4,5}{1} = 4,5Kg \quad (7)$$



Σχήμα 3

(γ) Για να υπολογίσουμε το διάστημα που θα καλύψουν τα σώματα Σ_2 και Σ_3 από τη στιγμή που κόβεται το νήμα N_1 μέχρι και τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα του Σ_2 , υπολογίζουμε την ταχύτητα του σώματος Σ_2 κατά τη χρονική στιγμή που κόβεται το νήμα N_1 , καθώς και τον χρόνο ανόδου του Σ_2 .

$$(i) u_0 = a \cdot t = 1.2 \Rightarrow u_0 = 2 \frac{m}{s} \quad (8) \quad u_{\text{ΤΕΛΙΚΟ}} = 0 \Rightarrow u_{\text{ΤΕΛΙΚΟ}} = u_0 - g \cdot t_{\text{ΑΝΟΔΟΥ}} \Rightarrow t_{\text{ΑΝΟΔΟΥ}} = \frac{u_0}{g}$$

$$\Rightarrow t_{\text{ΑΝΟΔΟΥ}} = \frac{2}{10} = 0,2s \quad (9) \Rightarrow h_{\text{max}} = u_0 \cdot t_{\text{ΑΝΟΔΟΥ}} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{\text{ΑΝΟΔΟΥ}}^2 \quad (10)$$

$$\Rightarrow h_{\text{max}} = 0,2m \quad (11)$$

$$(ii) \chi_3 = u_0 \cdot t_{\text{ΑΝΟΔΟΥ}} = 2 \cdot 0,2 \Rightarrow \chi_3 = 0,4m \quad (12)$$

ΘΕΜΑ 3^ο

(α) Η μπάλα καλύπτει την απόσταση H κάνοντας ελεύθερη πτώση. Ο χρόνος που κάνει για να καλύψει την απόσταση h_1 είναι t_1 ενώ ο χρόνος που κάνει για να καλύψει την απόσταση $h_1 + h_2$ είναι $t_1 + t_2$. Έτσι:

$$h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \quad \text{και} \quad h_1 + h_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_1 + t_2)^2 \quad (1)$$

Λύνουμε το σύστημα των δύο αυτών εξισώσεων, αντικαθιστώντας το h_1 στη δεύτερη εξίσωση, οπότε προκύπτει:

$$\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 + h_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 + g \cdot t_1 \cdot t_2 \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση 2 προκύπτει ο χρόνος t_1 .

$$2 = 5 \cdot 0,4^2 + 10 \cdot 0,4 \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = 0,3s \quad (3)$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,3^2 = 0,45m$$

Από το σχήμα προκύπτει το σύστημα των δύο πιο κάτω εξισώσεων:

$$h_1 + h_2 + h_4 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_1 + t_2 + t_4)^2 \quad (4)$$

$$h_1 + h_2 + h_4 + h_3 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_1 + t_2 + t_4 + t_3)^2 \quad (5)$$

Από την εξίσωση 4 με αντικατάσταση προκύπτει:

$$0,45 + h_4 + 2 = 5(0,3 + 0,4 + t_4)^2 \Rightarrow 2,45 + h_4 = 5(0,7 + t_4)^2 \quad (6)$$

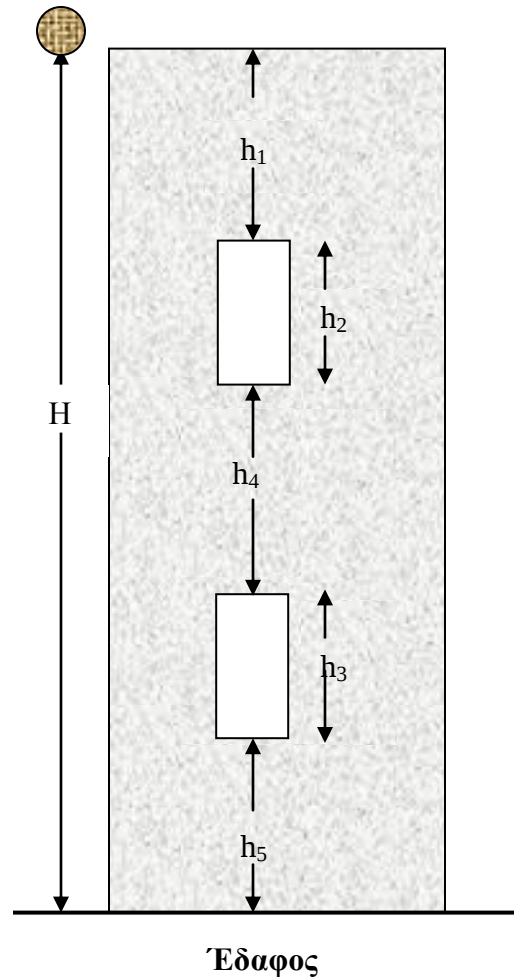
Από τη σχέση 5 προκύπτουν μετά από αντικατάσταση τα ακόλουθα:

$$2,45 + h_4 + 2 = 5(0,85 + t_4)^2 \Rightarrow 4,45 + 5(0,7 + t_4)^2 - 2,45 = 5(0,85 + t_4)^2 \quad (7)$$

Λύνουμε την εξίσωση ως προς τον άγνωστο χρόνο t_4

$$2 + 2,45 + 5t_4^2 + 7t_4 = 3,6125 + 5t_4^2 + 8,5t_4 \Rightarrow t_4 = 0,56s \quad (8)$$

Σελίδα 4 από 9



$$\text{Από την } 4 \Rightarrow 0,45 + 2 + h_4 = 5(0,3 + 0,4 + 0,56)^2 \quad (9)$$

$$h_4 = 5,49\text{m} \quad (10)$$

$$H = h_1 + h_2 + h_4 + h_3 + h_5 = 0,45 + 2 + 5,49 + 2 + 3 = 12,94\text{m} \quad (11)$$

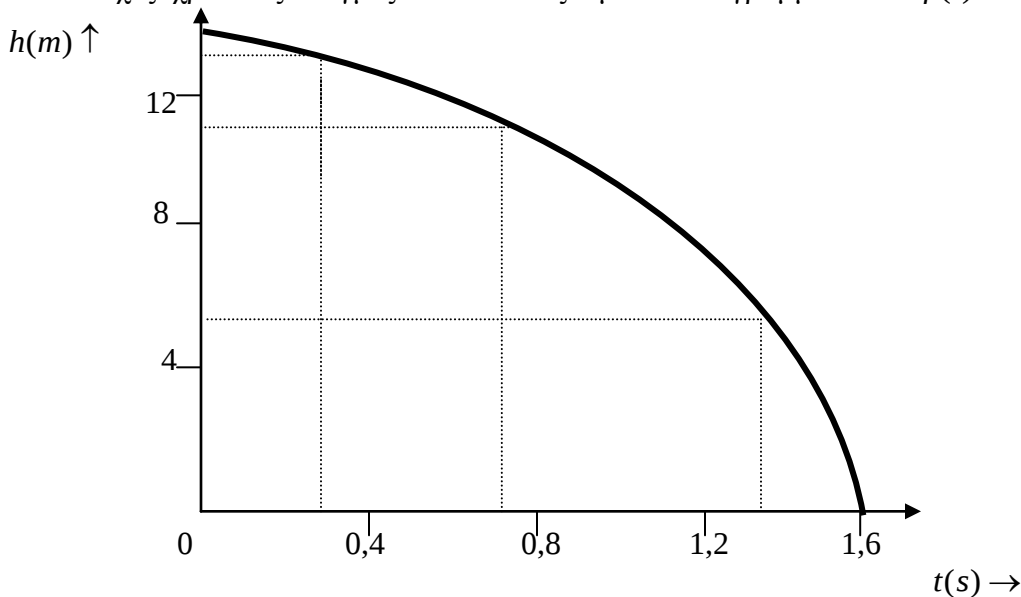
(β) Ο χρόνος που χρειάζεται η μπάλα για να διανύσει την απόσταση H βρίσκεται από την επίλυση της εξίσωσης (12).

$$H = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12,94}{10}} \Rightarrow t = 1,61\text{s} \quad (12)$$

(γ) Η ταχύτητα με την οποία η μπάλα συναντά το έδαφος προκύπτει σαν η λύση της εξίσωσης (13).

$$u = g \cdot t = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (13)$$

(δ) Χρησιμοποιώντας τις διάφορες τιμές του ύψους που βρήκαμε και τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές κατασκευάζουμε το διάγραμμα $h = f(t)$.



ΘΕΜΑ 4⁰

(α) Το μέτρο της δύναμης F_1 που ασκεί το αυτοκίνητο Β στο Α τη στιγμή της μετωπικής σύγκρουσης είναι ίσο με το μέτρο της δύναμης F_2 που ασκεί την ίδια χρονική στιγμή το αυτοκίνητο Α στο Β σύμφωνα με τον Γ' νόμο του Νεύτωνα. Άρα $|F_1| = |F_2|$.

(β) Το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας του αυτοκινήτου Α είναι ίσο με το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας του αυτοκινήτου Β κατά τη διάρκεια της μετωπικής σύγκρουσης. Έτσι, $\Delta u_A = \Delta u_B$ αφού $|F_1| = |F_2| \Rightarrow m_A \cdot \frac{\Delta u_A}{\Delta t} = m_B \cdot \frac{\Delta u_B}{\Delta t}$

ΘΕΜΑ 5^ο

(α) Για να βρούμε το συνολικό χρόνο που έκανε η σφαίρα από τη στιγμή της εκτόξευσής της μέχρι που θα φτάσει στο έδαφος λύνουμε τη σχέση 1.

$$y = u_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (1)$$

$$-60 = 20t - 5t^2 \Rightarrow 5t^2 - 20t - 60 = 0 \quad (2)$$

$$t^2 - 4t - 12 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2}$$

$$t_1 = 6s \text{ Αποδεκτή λύση, } t_2 = -2s \text{ Απορρίπτεται}$$

Άρα ο συνολικός χρόνος που έκανε για να φτάσει στο έδαφος είναι 6s.

(β) Χρησιμοποιούμε πάλιν την ίδια σχέση (σχέση 1)

$$y = u_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$\Rightarrow 15 = 20t - 5t^2 \Rightarrow 5t^2 - 20t + 15 = 0 \quad (2)$$

Απλοποιώντας προκύπτει ότι:

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \quad (3)$$

Οπότε από την (3)

$$t_3 = 1s \quad t_4 = 3s \quad (4)$$

Έτσι η σφαίρα θα βρίσκεται 75m πάνω από το έδαφος τις χρονικές στιγμές

$$t_3 = 1s \text{ και } t_4 = 3s .$$

(γ) Λύνουμε ξανά τη σχέση:

$$y = u_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow -25 = 20t - 5t^2 \Rightarrow t^2 - 4t - 5 = 0 \quad (5)$$

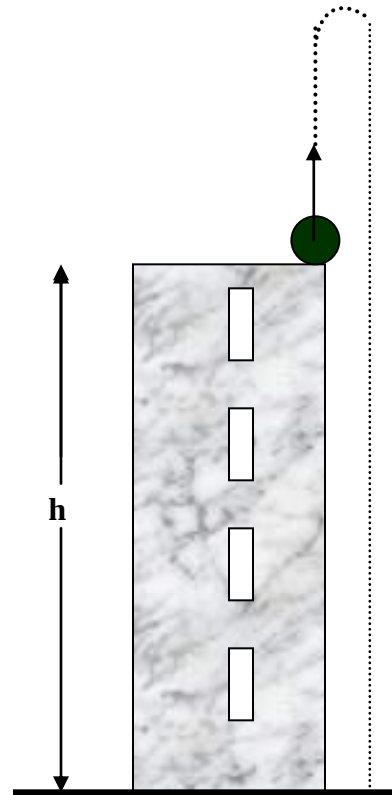
Λύνουμε την (5) ως προς t.

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} \text{ οπότε } t_5 = 5s \text{ Αποδεκτή } t_6 = -1s \text{ Απορρίπτεται.}$$

Αφού βρήκαμε τον χρόνο που κάνει η σφαίρα υπολογίζουμε την ταχύτητά της από τη σχέση (6)

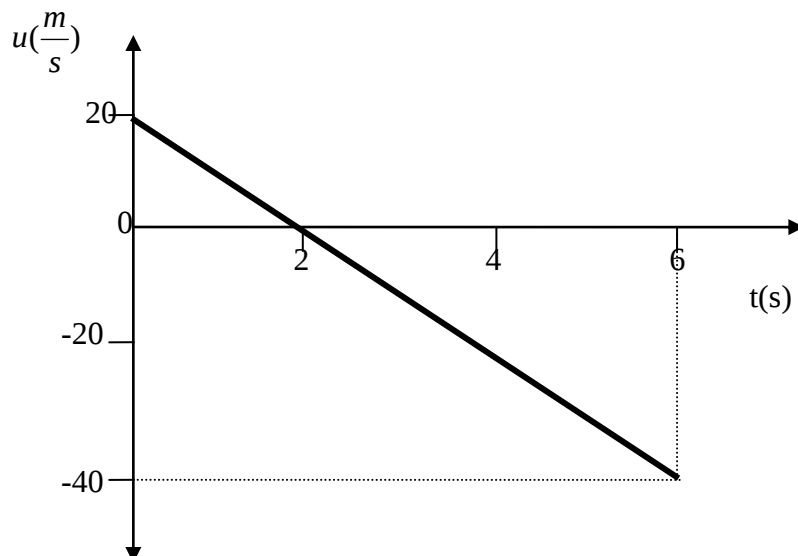
$$u = u_0 - g \cdot t = 20 - 10 \cdot 5 = -30 \frac{m}{s} \quad (6)$$

Άρα το μέτρο της ταχύτητας είναι $30 \frac{m}{s}$



Έδαφος

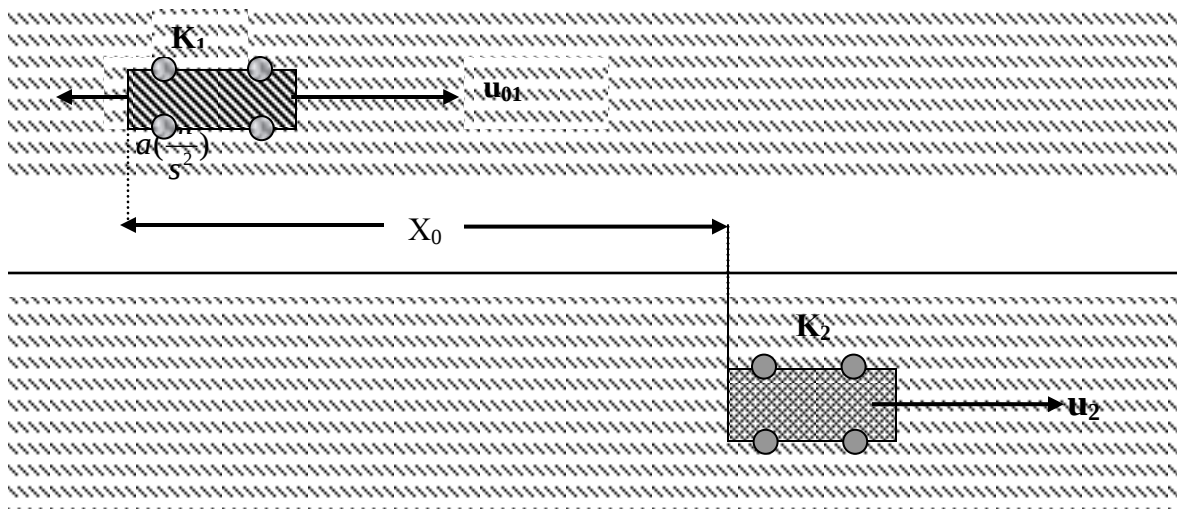
(δ) Με τις τιμές της ταχύτητας που ήδη έχουμε, κατασκευάζουμε το διάγραμμα $u = f(t)$ για το χρονικό διάστημα από 0s μέχρι και 6s.



$$u_{\text{ΕΛΛΑΦΟΥΣ}} = u_0 - g \cdot t_{\text{ΟΛΙΚΟ}} = 20 - 10 \cdot 6 \Rightarrow u_{\text{ΕΛΛΑΦΟΥΣ}} = -40 \frac{m}{s}$$

ΘΕΜΑ 6^ο

Για να υπολογίσουμε τις δύο θέσεις χ_α και χ_β που τα δύο μοντέλα αυτοκινήτων θα βρίσκονται το ένα δίπλα στο άλλο λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1). Από τις λύσεις των δύο εξισώσεων θα προκύψουν οι χρόνοι t_a και t_β που κάνουν τα δύο μοντέλα αυτοκινήτων K_1, K_2 ώσπου να συναντηθούν.



$$\chi = u_{01} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2 \quad \chi = \chi_0 + u_2 \cdot t \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow u_{01} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2 = \chi_0 + u_2 \cdot t \Rightarrow 30t - 0,18t^2 = 50 + 20t \quad (2)$$

$$0,18t^2 - 10t + 50 = 0 \Rightarrow t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{0,36}$$

$$\text{Άρα } t_a = 5,55s \text{ και } t_\beta = 50s$$

Αντικαθιστώντας τις πιο πάνω τιμές στις εξισώσεις (1) προκύπτουν οι δύο θέσεις χ_α και χ_β .

$$\chi_\alpha = 50 + 20 \cdot 5,55 = 161m$$

$$\chi_\beta = 50 + 20 \cdot 50 = 1050m$$

Έτσι, τα δύο μοντέλα αυτοκινήτων K_1 και K_2 θα βρεθούν το ένα δίπλα στο άλλο για πρώτη φορά όταν θα απέχουν 161m από τη θέση $X=0$ και θα ξαναβρεθούν το ένα δίπλα στο άλλο για δεύτερη φορά όταν θα απέχουν 1050m από το ίδιο σημείο.

(β) Για να βρούμε τις ταχύτητες u_a και u_β που θα έχει το K_1 όταν θα βρίσκεται δίπλα από το K_2 λύνουμε την εξίσωση (3)

$$u = u_{01} - a_1 \cdot t \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση 3 τους χρόνους $t_a = 5,55s$ και $t_\beta = 50s$ προκύπτουν οι πιο κάτω ταχύτητες:

$$u_a = 30 - 0,36 \cdot 5,55 = 28 \frac{m}{s} \text{ και } u_\beta = 30 - 0,36 \cdot 50 = 12 \frac{m}{s}$$

(γ) Για να βρούμε τη επιβράδυνση που πρέπει να έχει το K_1 για να βρεθεί δίπλα στο K_2 μια μόνο φορά θα λύσουμε την πιο κάτω εξίσωση.

Για να βρεθούν μόνο μια φορά το ένα δίπλα στο άλλο θα πρέπει η Δ της δευτεροβάθμιας εξίσωσης να είναι ίση με μηδέν.

$$30t - \frac{1}{2} \cdot a'_1 \cdot t^2 = 50 + 20t \Rightarrow \frac{1}{2} a'_1 \cdot t^2 - 10t + 50 = 0 \Rightarrow a'_1 \cdot t^2 - 20t + 100 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 400 - 4a'_1 \cdot 100 = 0 \Rightarrow a'_1 = 1 \frac{m}{s^2}$$

(δ) Για να βρούμε την ταχύτητα που θα πρέπει να έχει το K_1 όταν θα βρεθεί για μια μόνο φορά δίπλα από το K_2 θα πρέπει να λύσουμε την ίδια, όπως και στο ερώτημα (γ), εξίσωση ως προς το χρόνο.

$$t^2 - 20t + 100 = 0$$

$$t = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 400}}{2} \Rightarrow t = 10s \quad (4)$$

$$u_1 = u_{01} - a'_1 \cdot t = 30 - 1 \cdot 10 \Rightarrow u_1 = 20 \frac{m}{s} \quad (4)$$

ΘΕΜΑ 7⁰

(α) Το παιδί για να καταφέρει να μεταφέρει το Σ προς το μέρος του με σταθερή ταχύτητα, ασκώντας πάνω σε αυτό σταθερή δύναμη μέτρου F_1 , θα πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο Σ κατά τον άξονα χ και κατά τον άξονα ψ να είναι ίση με μηδέν

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow \Sigma F_\chi = 0 \text{ (1) και } \Sigma F_\psi = 0 \text{ (2)}$$

$$(1) \Rightarrow F_1 - B_\chi = 0 \Rightarrow F_1 - B \cdot \eta\mu\phi_1 = 0 \Rightarrow$$

$$F_1 = B \cdot \eta\mu\phi_1 \Rightarrow \eta\mu\phi_1 = \frac{F_1}{B} = \frac{100}{200} \Rightarrow \eta\mu\phi_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Οπότε } \phi_1 = 30^\circ \text{ (2)}$$

(β) Από το ίδιο σχήμα μπορούμε να υπολογίσουμε και το μέτρο της αντίδρασης του επιπέδου N_1 .

Με βάση το σχήμα 1 και τη εξίσωση (2) προκύπτει:

$$\Sigma F_\psi = 0 \Rightarrow N_1 - B_\psi = 0 \Rightarrow N_1 - B \sigma\upsilon\nu\phi_1 = 0 \Rightarrow N_1 = B \sigma\upsilon\nu\phi_1 \Rightarrow N_1 = 200 \frac{\sqrt{3}}{2} = 100 \cdot \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow N_1 = 173,20 \text{ N (3)}$$

(γ) Βασιζόμενοι και πάλιν στο ίδιο σχήμα μπορούμε να υπολογίσουμε τη δύναμη F_2 που πρέπει να ασκήσει το παιδί στο σώμα Σ για να καταφέρει να μεταφέρει με σταθερή ταχύτητα προς το μέρος του, όταν η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου γίνει

$$\text{ίση με } \phi_2 = \frac{\phi_1}{2}.$$

$$\Sigma F_\chi = 0 \Rightarrow F_2 - B'_\chi = 0 \Rightarrow F_2 = B'_\chi \Rightarrow F_2 = B \cdot \eta\mu\phi_2 \Rightarrow F_2 = 200 \cdot \eta\mu 15^\circ = 51,76 \text{ N (4)}$$

Σχήμα 1