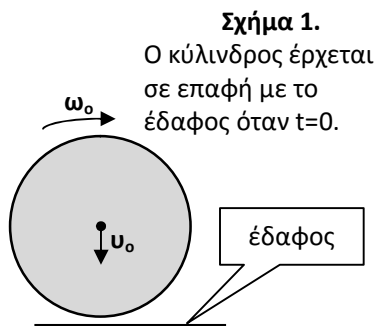
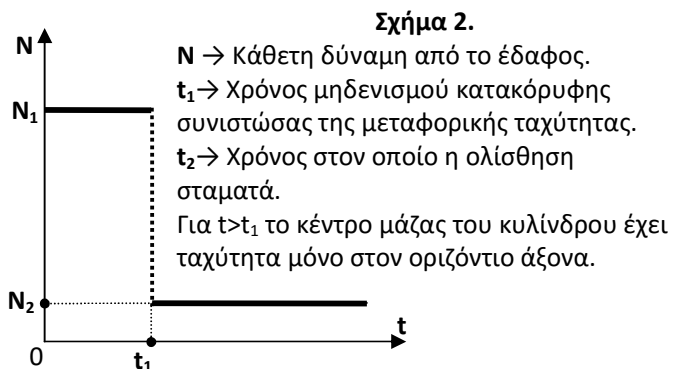


Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας	Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή Βασίλη Ξανθόπουλου
	Φυσική Γ' Τάξης Δράμα, 7 Απριλίου 2019

Ομογενής κύλινδρος ακτίνας R και μάζας m , με ροπή αδράνειας $I = \frac{1}{2}mR^2$ γύρω από άξονα που περνά από τα κέντρα των βάσεων του, αφήνεται περιστρεφόμενος να πέσει στο έδαφος από μικρό ύψος. Τη στιγμή $t=0$ ο κύλινδρος φτάνει στο έδαφος έχοντας μεταφορική ταχύτητα u_0 προς τα κάτω και γωνιακή ταχύτητα ω_0 γύρω από τον άξονα που αναφέρθηκε παραπάνω, με τον άξονα αυτό να είναι οριζόντιος (σχήμα 1). Η κατακόρυφη συνιστώσα της μεταφορικής ταχύτητας του κυλίνδρου μηδενίζεται όταν $t=t_1$ και για $t>t_1$ συνεχίζει να είναι ίση με 0, δηλαδή ο κύλινδρος δεν αναπηδά. Στο σχήμα 2 δίνεται η κάθετη δύναμη N από το έδαφος στον κύλινδρο σε σχέση με το χρόνο. Κατά την διάρκεια της επαφής του κυλίνδρου με το έδαφος, ο κύλινδρος αρχικά ολισθαίνει. Ο κύλινδρος παραμορφώνεται ελάχιστα έτσι ώστε να θεωρούμε ότι δεν μεταβάλλεται η ροπή αδράνειας του.



Ο συντελεστής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και εδάφους είναι $\mu \neq 0$. Ο κύλινδρος ολισθαίνει στο έδαφος μέχρι το χρόνο t_2 , ενώ η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίση με g .



1. Να δείξετε ότι όταν θα σταματήσει η ολίσθηση του κυλίνδρου στο έδαφος, τότε $u_{cm} = \omega R$, όπου u_{cm} η οριζόντια μεταφορική ταχύτητα. (μονάδες 5)

2. Αν $t_2 \leq t_1$ και κατά τη διάρκεια της ολίσθησης, να βρείτε την μεταφορική επιτάχυνση a_{cmx} στον οριζόντιο άξονα x και την γωνιακή επιβράδυνση α_γ του κυλίνδρου, σε σχέση με τα δεδομένα της άσκησης. (μονάδες 5)

3. Να δείξετε ότι αν $t_2 \leq t_1$, η γωνιακή ταχύτητα ω_1 του κυλίνδρου μετά το πέρας της ολίσθησης, εξαρτάται μόνο από την ω_0 και να βρείτε την τιμή της. (μονάδες 5)

4. Να δείξετε ότι αν $t_2 > t_1$, η γωνιακή ταχύτητα ω_2 του κυλίνδρου μετά το πέρας της ολίσθησης, εξαρτάται μόνο από την ω_0 και να βρείτε την τιμή της. (μονάδες 5)

Κ Α Λ Η Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Α

Ε Ν Δ Ε Ι Κ Τ Ι Κ Ε Σ Λ Υ Σ Ε Ι Σ

1. Σχολικό βιβλίο σελ. 112

$$2. \sum F_y = m\alpha_y \Rightarrow N_1 - mg = m \frac{\Delta v_y}{t_1} \Rightarrow N_1 = mg + m \frac{[0 - (-v_0)]}{t_1} \Rightarrow N_1 = m(g + \frac{v_0}{t_1})$$

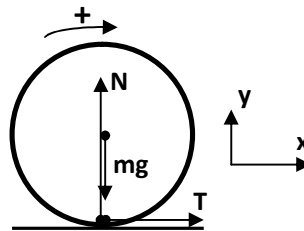
τριβή $T_1 = \mu N_1 = \mu m(g + \frac{v_0}{t_1})$

$$\sum F_x = m\alpha_{cmx} \Rightarrow T_1 = m\alpha_{cmx} \Rightarrow \mu m(g + \frac{v_0}{t_1}) = m\alpha_{cmx} \Rightarrow \left[\alpha_{cmx} = \mu(g + \frac{v_0}{t_1}) \right] \quad (1)$$

$$\sum \tau_0 = I\alpha_\gamma \Rightarrow -T_1 R = I\alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\gamma = -\frac{T_1 R}{I} \Rightarrow \left[\alpha_\gamma = -\frac{\mu m(g + \frac{v_0}{t_1})R}{I} \right] \quad (2)$$

3. $v_{cmx} = \alpha_{cmx} t = \mu(g + \frac{v_0}{t_1})t \quad (3) \quad \text{επιτάχυνση}$

άρα $\omega = \omega_0 + \alpha_\gamma t = \omega_0 - \frac{\mu m(g + \frac{v_0}{t_1})R}{I} t \quad (4) \quad \text{επιβράδυνση}$



Η ολίσθηση σταματά όταν $v_{cmx} = \omega R$ τη στιγμή $t=t_2$. Άρα

$$v_{cmx} = \omega R \xrightarrow{(3),(4)} \mu(g + \frac{v_0}{t_1})t_2 = \omega_0 R - \frac{\mu m(g + \frac{v_0}{t_1})R^2}{I} t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{\omega_0 R}{\mu(g + \frac{v_0}{t_1})(1 + \frac{mR^2}{I})} \quad (5)$$

$$\text{τότε } (4), (5) \quad \omega_1 = \omega_0 - \left[\frac{\mu m(g + \frac{v_0}{t_1})R}{I} \right] \left[\frac{\omega_0 R}{\mu(g + \frac{v_0}{t_1})(1 + \frac{mR^2}{I})} \right] = \left[\omega_0 / (1 + \frac{mR^2}{I}) \right] = [\gamma I \alpha I = \frac{1}{2} mR^2] = \left[\frac{\omega_0}{3} \right]$$

[Οι υπολογισμοί γίνονται απλούστεροι αν από την αρχή τεθεί $I = (\frac{1}{2})mR^2$]

♦ για εναλλακτική λύση βλέπε παρακάτω.

4. από ερώτημα 3 όταν $t = t_1$

$$v_{cmx t_1} = \alpha_{cmx} t_1 = \mu(g + \frac{v_0}{t_1})t_1 = \mu g t_1 + \mu v_0 \quad \text{και} \quad \omega_{t_1} = \omega_0 + \alpha_\gamma t_1 = \omega_0 - \frac{\mu m(g + \frac{v_0}{t_1})R}{I} t_1 = \omega_0 - \frac{\mu m R (g t_1 + v_0)}{I}$$

για $t > t_1 \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow N_2 - mg = 0 \Rightarrow N_2 = mg \quad \text{άρα} \quad \text{τριβή} \quad T_2 = \mu N_2 = \mu mg$

$$\sum F_x = m\alpha'_{cmx} \Rightarrow T_2 = m\alpha'_{cmx} \Rightarrow \mu mg = m\alpha'_{cmx} \Rightarrow \alpha'_{cmx} = \mu g \quad \text{άρα}$$

$$v_{cmx} = v_{cmx t_1} + \alpha'_{cmx} (t - t_1) = \mu g t_1 + \mu v_0 + \mu g (t - t_1) \quad (6) \quad \text{επιτάχυνση}$$

$$\sum \tau_0 = I\alpha'_\gamma \Rightarrow -T_2 R = I\alpha'_\gamma \Rightarrow \alpha'_\gamma = -\frac{T_2 R}{I} \Rightarrow \alpha'_\gamma = -\frac{\mu mg R}{I}$$

$$\omega = \omega_{t_1} + \alpha'_\gamma (t - t_1) = \omega_0 - \frac{\mu m R (g t_1 + v_0)}{I} - \frac{\mu mg R}{I} (t - t_1) = \omega_0 - \frac{\mu m R (v_0 + g t)}{I} \quad (7) \quad \text{επιβράδυνση}$$

η ολίσθηση σταματά όταν $v_{cmx} = \omega R$ τη στιγμή $t = t_2$ άρα από (6), (7)

$$v_{cmx} = \omega R \Rightarrow \mu g t_1 + \mu v_0 + \mu g(t_2 - t_1) = \omega_0 R - \frac{\mu m R^2 (v_0 + g t_2)}{I} \Rightarrow t_2 = \frac{\omega_0 R I - \mu v_0 I - \mu m R^2 v_0}{\mu g (I + m R^2)} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{τότε από (7), (8)} \quad \omega_2 = \omega_{t_1} + \alpha'_\gamma (t_2 - t_1) &= \omega_0 - \frac{\mu m R (v_0 + g t_2)}{I} = \omega_0 - \frac{\mu m R [v_0 + g \frac{\omega_0 R I - \mu v_0 I - \mu m R^2 v_0}{\mu g (I + m R^2)}]}{I} = \\ &= \boxed{\omega_0 / (1 + \frac{m R^2}{I})} = [\gamma \alpha \quad I = \frac{1}{2} m R^2] = \left\| \frac{\omega_0}{3} \right\| \end{aligned}$$

[Οι υπολογισμοί γίνονται απλούστεροι αν από την αρχή τεθεί $I = (\frac{1}{2}) m R^2$]

♦**εναλλακτικά τα ερωτήματα 3 και 4 μπορούν να απαντηθούν ταυτόχρονα ως εξής:**

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = m \alpha_{cmx} &\Rightarrow T = m \alpha_{cmx} \Rightarrow \alpha_{cmx} = \frac{T}{m} \\ \sum \tau_0 = I \alpha_\gamma &\Rightarrow -TR = I \alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\gamma = -\frac{TR}{I} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\alpha_{cmx}}{\alpha_\gamma} = \frac{-\frac{T}{m}}{\frac{TR}{I}} \xrightarrow{T \neq 0 \text{ (ολίσθηση)}} \frac{\alpha_{cmx}}{\alpha_\gamma} = -\frac{I}{mR} \Rightarrow \alpha_\gamma = -\frac{mR}{I} \alpha_{cmx}$$

όταν η ολίσθηση σταματά $v_{cmx} = \omega R \Rightarrow v_{cmx} = (\omega_0 + \alpha_\gamma t) R \Rightarrow v_{cmx} = (\omega_0 - \frac{mR}{I} \alpha_{cmx} t) R$

$$v_{cmx} = \omega_0 R - \frac{m R^2}{I} (\alpha_{cmx} t) \Rightarrow v_{cmx} = \omega_0 R - \frac{m R^2}{I} v_{cmx} \Rightarrow \omega R = \frac{\omega_0 R}{1 + \frac{m R^2}{I}} \Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0 / (1 + \frac{m R^2}{I})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\gamma \alpha \quad I = \frac{1}{2} m R^2 \right] \Rightarrow \left\| \omega = \frac{\omega_0}{3} \right\|$$

Παρατηρήσεις (δεν απαιτούνται):

A. Τα παραπάνω (εναλλακτική απάντηση) ισχύουν για όσο χρόνο υπάρχει τριβή T και ανεξάρτητα με την τιμή της (ακόμη και αν η N δεν είναι σταθερή) άρα για όσο χρόνο υπάρχει ολίσθηση και ανεξάρτητα από την σχέση μεταξύ των t_1 και t_2 . Ενδεχόμενες αναπηδήσεις δεν αλλάζουν το τελικό αποτέλεσμα αλλά για όσο χρόνο δεν υπάρχει επαφή με το έδαφος, $T=0$ οπότε v_{cmx} και ω δεν μεταβάλλονται. Μετά την παύση αναπηδήσεων και ολίσθησης, η τριβή μηδενίζεται οπότε μεταφορική αλλά και γωνιακή ταχύτητα παραμένουν σταθερές. Τότε $\omega = \omega_0/3$.

B. Σε κάθε περίπτωση, μετά το πέρας της ολίσθησης: $\omega = \omega_0 / (1 + \frac{m R^2}{I})$. Από τον τύπο αυτό φαίνεται ότι μέγιστη γωνιακή ταχύτητα ω μετά το πέρας της ολίσθησης θα έχουμε όταν η ροπή αδράνειας I' γίνει μέγιστη. Αυτό συμβαίνει όταν όλη η μάζα είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρεια του κυλινδρικού σώματος, οπότε $I' = m R^2$. Τότε $\omega_{\max} = \frac{\omega_0}{1 + \frac{m R^2}{m R^2}} = \frac{\omega_0}{2}$