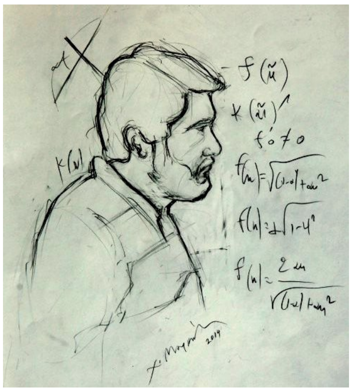
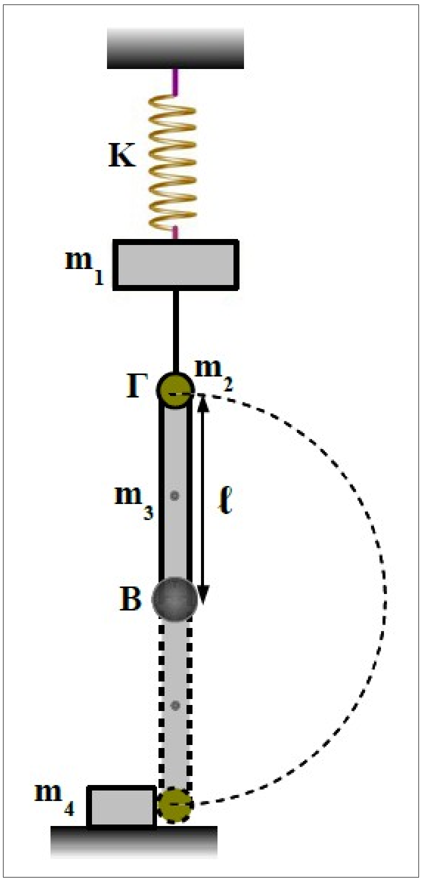
Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας	Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου
	**Φυσική: Τάξη: Γ΄** **Δράμα 29 Μαρτίου 2015**



Κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $K=100\,N/m$ έχει ακλόνητα στερεωμένο το άνω άκρο του. Στο κάτω άκρο του ελατηρίου είναι τοποθετημένο σώμα μάζας $m_1=4\,Kg$. Το σώμα μάζας m_1 είναι δεμένο μέσω αβαρούς και μη εκτατού νήματος στο άνω άκρο Γ ομογενούς ράβδου ΒΓ, μήκους $\ell=2\,m$ και μάζας $m_3=3\,Kg$ που έχει ροπή αδράνειας $I_{cm}=\frac{1}{12}\cdot m_3\cdot \ell^2$. Στο άκρο Γ της ράβδου υπάρχει στερεωμένη μία σφαίρα μάζας $m_2=1\,Kg$, αμελητέων διαστάσεων (βλέπε σχήμα). Αρχικά όλο το σύστημα ισορροπεί και η ράβδος είναι κατακόρυφη, ενώ η δύναμη στην άρθρωση στο άκρο Β της ράβδου είναι μηδέν.

Α. Να υπολογίσετε την αρχική παραμόρφωση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος στην κατάσταση ισορροπίας.

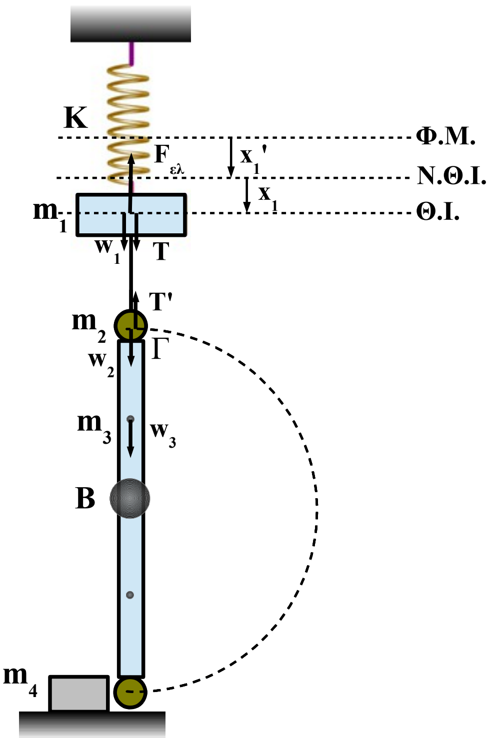
Β. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ δίνεται μία ελάχιστη ώθηση στη ράβδο ($\omega_0\simeq 0$) και το νήμα σπάει. Το σώμα μάζας m_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ενώ η ράβδος στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από την άρθρωση στο άκρο Β. Να γράψετε την εξίσωση της ταλάντωσης του σώματος μάζας m_1 , θεωρώντας θετική τη φορά προς τα πάνω.

Γ. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα ω του συστήματος ράβδου-σφαίρας στην κατώτερη, κατακόρυφη θέση του.

Δ. Στην κατώτερη θέση του συστήματος ράβδου-σφαίρας, η σφαίρα συγκρούεται ελαστικά με σώμα μάζας $m_4=4\,Kg$ το οποίο ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο.
Να υπολογίσετε: τη γωνιακή ταχύτητα ω' του συστήματος ράβδου-σφαίρας και την ταχύτητα υ_4' του σώματος μάζας m_4 , μετά την κρούση.

Δίνεται: $g=10\,m/s^2$
Τα τέσσερα ερωτήματα είναι ισοδύναμα.

Λύσεις



Α. Ισορροπία της ράβδου:

$$\Sigma F=0\rightarrow T'=w_2+w_3(\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\quad F_B=0)\rightarrow T'=m_2\cdot g+m_3\cdot g=10+30=40\,N$$

Λόγω αβαρούς νήματος: $T=T'=40\,N$. Ισορροπία της m_1 στη Θέση Ισορροπίας (Θ.Ι.):

$$\Sigma F_1=0\rightarrow F_{\varepsilon\lambda}=w_1+T\rightarrow K\cdot(x_1+x_1')=m_1\cdot g+T\rightarrow$$

$$100\cdot(x_1+x_1')=40+40\rightarrow x_1+x_1'=80/100=0{,}8\,m \quad (1)$$

Β. Ισορροπία της m_1 στη Νέα Θέση Ισορροπίας (Ν.Θ.Ι.) (αφού κόψουμε το νήμα):

$$\Sigma F_1'=0\rightarrow F_{\varepsilon\lambda}'=w_1\rightarrow K\cdot x_1'=m_1\cdot g\rightarrow x_1'=m_1\cdot g/K=40/100=0{,}4\,m$$

(1) → $x_1=0{,}8-x_1'=0{,}8-0{,}4=0{,}4\,m=A_1$ αφού στη θέση αυτή η ταχύτητα είναι μηδεν.

Η m_1 ξεκινά με $\upsilon_{0,1}=0$ από την κάτω ακραία θέση της απλής αρμονικής ταλάντωσης:

$x_1=A_1\cdot\eta\mu(\omega_1\cdot t+\varphi_{0,1})$ αλλά για $t=t_0=0$:

$$-A_1=A_1\cdot\eta\mu\varphi_{0,1}\rightarrow\eta\mu\varphi_{0,1}=-1=\eta\mu\frac{3\cdot\pi}{2}\rightarrow\varphi_{0,1}=\frac{3\cdot\pi}{2}\,rad$$

ενώ $D=K=m_1\cdot\omega_1^2\rightarrow\omega_1=\sqrt{\frac{K}{m_1}}=\sqrt{\frac{100}{4}}=5\,\frac{rad}{s}$

Άρα η εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι: $x_1=0{,}4\cdot\eta\mu(5\cdot t+\frac{3\cdot\pi}{2})$ (S.I.)

Γ. Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.) για το σύστημα των μαζών $m_2 - m_3$, με επίπεδο αναφοράς δυναμικής ενέργειας το άκρο Γ στην κατώτερή του θέση:

$$K_{αρχ.} + U_{αρχ.} = K_{τελ.} + U_{τελ.} \rightarrow 0 + m_2 \cdot g \cdot 2\,\ell + m_3 \cdot g \cdot \frac{3\,\ell}{2} = \frac{1}{2} \cdot I_{ολ,B} \cdot \omega^2 + m_3 \cdot g \cdot \frac{\ell}{2} \quad (2)$$

Θεώρημα Steiner:

$$I_{3,B} = I_{cm} + m_3 \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} \cdot m_3 \cdot \ell^2 + \frac{1}{4} \cdot m_3 \cdot \ell^2 = \frac{1}{3} \cdot m_3 \cdot \ell^2 = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2^2 = 4\,Kg \cdot m^2$$

$$I_{2,B} = m_2 \cdot \ell^2 = 4\,Kg \cdot m^2 \qquad I_{ολ,B} = I_{2,B} + I_{3,B} = 4 + 4 = 8\,Kg \cdot m^2$$

άρα (2) → $40 + 90 - 30 = 4 \cdot \omega^2 \rightarrow \omega^2 = 25 \rightarrow \omega = 5\,rad/s$

Δ. Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής (Α.Δ.Σ.) κατά την ελαστική κρούση:

$$\vec{L}_{ολ,πριν} = \vec{L}_{ολ,μετά} \rightarrow I_{ολ,B} \cdot \omega = I_{ολ,B} \cdot \omega' + m_4 \cdot \upsilon_4' \cdot \ell \rightarrow 8 \cdot 5 = 8 \cdot \omega' + 8 \cdot \upsilon_4' \rightarrow \upsilon_4' = 5 - \omega' \quad (3)$$

Αρχή Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας (Α.Δ.Κ.Ε.) κατά την ελαστική κρούση:

$$K_{ολ,πριν} = K_{ολ,μετά} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot I_{ολ,B} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot I_{ολ,B} \cdot (\omega')^2 + \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot (\upsilon_4')^2$$

που, με τη βοήθεια της (3), δίνει:

$$4 \cdot 5^2 = 4 \cdot (\omega')^2 + 2 \cdot (5 - \omega')^2 \rightarrow 50 = 2 \cdot (\omega')^2 + 25 + (\omega')^2 - 10 \cdot \omega'$$

$3 \cdot (\omega')^2 - 10 \cdot \omega' - 25 = 0$ άρα: ($\Delta = 100 - 4 \cdot 3 \cdot (-25) = 400$)

με λύσεις: $\omega' = 5\,rad/s$ (απορρίπτεται)

και: $\omega' = -5/3\,rad/s$ (δεκτή)

άρα (3) → $\upsilon_4' = 5 + 5/3 = 20/3\,m/s$