ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Η επεξεργασία των θεμάτων θα γίνει γραπτώς σε χαρτί Α4 ή σε τετράδιο που θα σας δοθεί (το οποίο θα παραδώσετε στο τέλος της εξέτασης). Εκεί θα σχεδιάσετε και όσα γραφήματα ζητούνται στο **Θεωρητικό Μέρος**.

2. Τα γραφήματα του **Πειραματικού Μέρους** θα τα σχεδιάσετε *κατά προτεραιότητα* στο μιλιμετρέ χαρτί που συνοδεύει τις εκφωνήσεις.

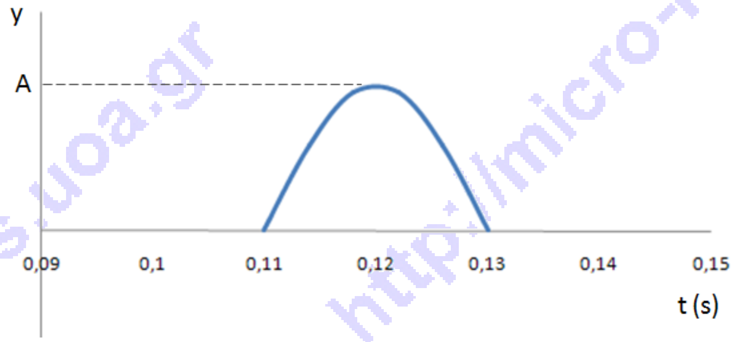
3. Οι απαντήσεις στα υπόλοιπα ερωτήματα τόσο του **Θεωρητικού Μέρους** όσο και του **Πειραματικού** θα πρέπει *οπωσδήποτε* να συμπληρωθούν στο *“Φύλλο Απαντήσεων”* που θα σας δοθεί μαζί με τις εκφωνήσεις των θεμάτων.

Θεωρητικό Μέρος

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α. Σε σημείο Σ ($x_Σ$=0) γραμμικού ελαστικού μέσου μεγάλου μήκους προκαλείται τη χρονική στιγμή t = 0 διαταραχή, η οποία δημιουργεί έναν παλμό που διαδίδεται στο θετικό ημιάξονα.

Το παρακάτω διάγραμμα παριστάνει την απομάκρυνση *y* ενός σημείου Μ (x_M=1,2 m) του μέσου σε συνάρτηση με το χρόνο.

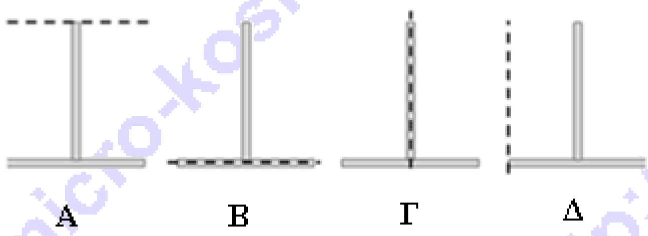


Α.1. Η ταχύτητα διάδοσης του παλμού στο ελαστικό μέσο είναι

α. 10,9 m/s β. 109,0 m/s γ. 1,09 m/s

Α.2. Να παρασταθεί γραφικά η απομάκρυνση ως προς το χρόνο ενός άλλου σημείου Λ ($x_Λ$=1,6 m).

Β. Ένα στερεό σώμα σχήματος Τ έχει κατασκευαστεί συνδέοντας δύο πανομοιότυπες μεταλλικές ράβδους. Περιστρέφουμε το σώμα με τέσσερις διαφορετικούς τρόπους, περί άξονα που έχει παρασταθεί σε καθεμιά από τις επόμενες εικόνες Α, Β, Γ και Δ. Να κατατάξετε τις εικόνες κατά φθίνουσα σειρά ροπής αδράνειας.



Γ. Ο Γιάννης περιστρέφει μία ηχητική πηγή που θεωρείται σημειακή, έτσι ώστε το επίπεδο της τροχιάς που διαγράφει να είναι οριζόντιο. Η ηχητική πηγή εκπέμπει συνεχώς ήχο συχνότητας f_s = 680 Hz. Όπως φαίνεται στο σχήμα η ηχητική πηγή απομακρύνεται από τον Κώστα στη θέση Α και κινείται προς αυτόν στη θέση Β. Ο Κώστας στέκεται τόσο μακριά από τον Γιάννη ώστε να ισχύει ΓΑ<< ΚΓ (το σχήμα δεν είναι υπό κλίμακα). Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα δίνεται ίση προς $υ_{ηχ}$ = 350 m/s.

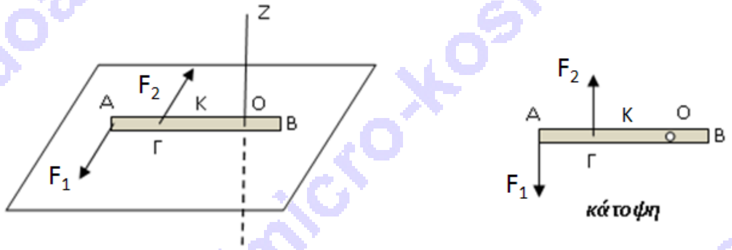
Γ.1. Εάν ο Κώστας αντιλαμβάνεται συχνότητα 700 Hz, όταν η ηχητική πηγή βρίσκεται στη θέση Β, να υπολογίσετε την ταχύτητά της.

Γ.2. Εξηγήστε γιατί, ενώ ο Γιάννης περιστρέφει την ηχητική πηγή, ακούει συνεχώς την ίδια συχνότητα.

Γ.3. Στη συνέχεια, σε ένα δεύτερο πείραμα, ο Γιάννης αφήνει κάτω την ηχητική πηγή, χωρίς να διακόψει τη λειτουργία της, και ενεργοποιεί μία δεύτερη, πανομοιότυπη με την πρώτη, την οποία κρατάει συνεχώς στο χέρι του. Να υπολογίσετε την σταθερή ταχύτητα με την οποία πρέπει να απομακρύνεται ο Γιάννης από τον Κώστα, έτσι ώστε ο δεύτερος να ακούει διακροτήματα συχνότητας 2 Hz.

ΘΕΜΑ 2ο

Μια λεπτή ομογενής ράβδος ΑΒ, ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, στη θέση που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Η ράβδος που έχει μήκος ℓ = 4 m και μάζα Μ = 6 kg, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα z, που περνά από ένα σημείο της Ο, με (ΟΒ) = ℓ/4 και τέμνει το επίπεδο σε σημείο Ο΄. Σε μια χρονική στιγμή t_0=0 ασκούνται πάνω της δυο δυνάμεις F_1 και F_2, σταθερού μέτρου $F_1 = F_2$ = 20 N, οι οποίες είναι διαρκώς κάθετες στη ράβδο. Η F_1 ασκείται στο άκρο Α, ενώ η F_2 σε σημείο Γ, όπου (ΑΓ) = ℓ/4, όπως στο σχήμα.



Α. Τη χρονική στιγμή $t_1 = \sqrt{7\pi}\ s \cong 4{,}69\ s$ να υπολογίσετε:

Α.1. τη στροφορμή της ράβδου ως προς το σημείο Ο,

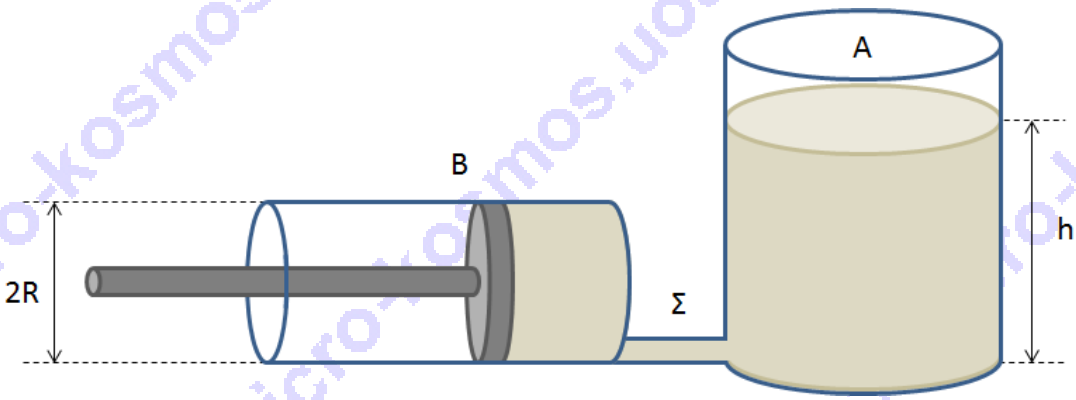
Α.2. την ταχύτητα, το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της διεύθυνσης της ταχύτητας καθώς και την επιτρόχια επιτάχυνση του κέντρου μάζας Κ της ράβδου

Β. Την χρονική στιγμή (t_1) σπάει ο άξονας περιστροφής z. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή $t_2 = 6{,}31\ s$ την ταχύτητα του άκρου Β καθώς και τη στροφορμή της ράβδου ως προς το σημείο Ο΄ του επιπέδου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτήν: $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$.

ΘΕΜΑ 3ο

Κυλινδρικό δοχείο Α τοποθετείται σε οριζόντιο δάπεδο με τον άξονά του κατακόρυφο, ενώ δεύτερο κυλινδρικό δοχείο Β, ακτίνας βάσης R, τοποθετείται με τον άξονά του οριζόντιο. Από το χαμηλότερο σημείο του Α εξέρχεται κυλινδρικός σωλήνας Σ που τον συνδέει με τον Β. Στο σύστημα προστίθεται κατάλληλη ποσότητα ιδανικού υγρού πυκνότητας ρ, ώστε στον κύλινδρο Α να ανέρχεται σε ύψος h=3R (το σχήμα δεν είναι υπό κλίμακα). Το ελεύθερο άκρο του Β φράσσεται με έμβολο, ενώ το ελεύθερο άκρο του Α παραμένει εκτεθειμένο στην ατμόσφαιρα. Θεωρώντας την τριβή που δέχεται το έμβολο αμελητέα και τη διατομή του Σ πολύ μικρή ως προς τις διαστάσεις των δοχείων, να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που πρέπει να ασκηθεί στο έμβολο, ώστε αυτό να μην εκτελεί μεταφορική κίνηση. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.

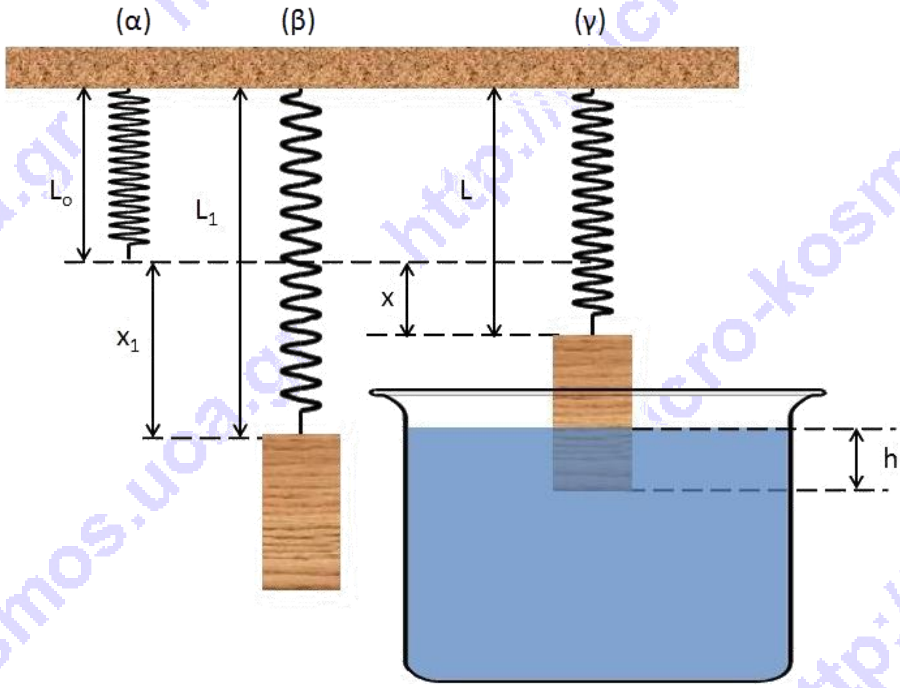


Πειραματικό Μέρος

Σκοπός της πειραματικής άσκησης είναι ο προσδιορισμός της πυκνότητας άγνωστου υγρού στο σχολικό εργαστήριο.

Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την πειραματική διάταξη του σχήματος, που αποτελείται από ένα ελατήριο άγνωστης σταθεράς k, συμπαγή και ομογενή κύλινδρο μάζας m, υγρό του οποίου την πυκνότητα ρ επιθυμούμε να προσδιορίσουμε και κατάλληλα εργαστηριακά δοχεία. Οι μετρήσεις των μηκών γίνονται με μετροταινίες.

Στο επόμενο σχήμα εικονίζονται οι διαδοχικές φάσεις του πειράματος.



Στη φάση (α) παριστάνεται το ελατήριο με το άνω άκρο του αναρτημένο σε ακλόνητο σημείο και με το κάτω άκρο του ελεύθερο. Το μήκος του είναι L_o= 17 cm.

Στη φάση (β) στο κάτω άκρο του ελατηρίου έχουμε αναρτήσει συμπαγή κύλινδρο μάζας *m* = 1 kg και ακτίνας βάσης *r* = 3 cm, ο οποίος ισορροπεί με τον άξονά του κατακόρυφο.

Τέλος, στη φάση (γ) ο κύλινδρος της προηγούμενης διάταξης έχει εν μέρει βυθιστεί κατά *h* εντός υγρού άγνωστης πυκνότητας, σε δοχείο επαρκούς χωρητικότητας ώστε να μπορούμε να προσθέτουμε κατά βούληση επιπλέον ποσότητα από το υγρό.

Η *πειραματική διαδικασία* έγκειται στο να προσθέτουμε κάποια ποσότητα υγρού στο δοχείο, να αφήνουμε το κύλινδρο να βρεθεί ξανά σε κατάσταση ισορροπίας και στη συνέχεια να μετράμε το *h* (ύψος βυθισμένου τμήματος κυλίνδρου) και το *L* (μήκος ελατηρίου). Η διαδικασία επαναλαμβάνεται 8 φορές. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων καταχωρίζονται στον παρακάτω πίνακα τιμών:

Α/Α μέτρησης	1	2	3	4	5	6	7	8
Μήκος ελατηρίου *L* (cm)	48,5	47,5	47,0	46,5	46,2	45,8	45,3	44,8
Ύψος βυθισμένου τμήματος κυλίνδρου *h* (cm)	1	1,8	2,5	3	3,5	4	4,5	5

Α. Να συμπληρωθεί ο αντίστοιχος πίνακας τιμών των επιμηκύνσεων του ελατηρίου *x* (cm) για κάθε μία από τις παραπάνω μετρήσεις.

Α/Α μέτρησης	1	2	3	4	5	6	7	8
Επιμήκυνση Ελατηρίου *x* (cm)								

Β. Να βρεθεί η σχέση που εκφράζει την επιμήκυνση *x* του ελατηρίου συναρτήσει του ύψους του βυθισμένου τμήματος του κυλίνδρου *h*.

Γ. Με βάση τις πειραματικές τιμές των *h* και *x* να εφαρμόσετε τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων (βλ. Σημείωση) ώστε να προσδιορίσετε την πυκνότητα ρ του υγρού.

Δ. Να σχεδιάσετε το αντίστοιχο γράφημα.

Δίνεται το g = 980 cm/s^2.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Έστω ότι έχουμε μετρήσει Ν ζεύγη τιμών x και y και βρήκαμε τις τιμές x_i και y_i, όπου i=1,2,3,…N. Αν ξέρουμε, ότι τα x και y συνδέονται με τη σχέση:

$$y = \alpha + \beta \cdot x$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τα α και β και να χαράξουμε την ευθεία y=f(x) χρησιμοποιώντας τους τύπους:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad \beta = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Η ερμηνεία του συμβόλου της άθροισης Σ είναι:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}$$

Καλή Επιτυχία

Αν θέλετε, μπορείτε να κάνετε κάποιο γράφημα σ' αυτή τη σελίδα και να την επισυνάψετε μέσα στο τετράδιό σας.

Επιλέξτε τους άξονες, τιτλοδοτήστε και συμπεριλάβετε τις κατάλληλες μονάδες σε κάθε άξονα.

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
Θεωρητικό Μέρος

Θέμα 1ο

Α.1. Σωστή απάντηση είναι η …………………..

Α.2. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση στο τετράδιό σας.

Β. Κατά φθίνουσα σειρά ροπής αδράνειας οι εικόνες ταξινομούνται ως εξής: ……………..

Γ.1. Η ταχύτητα της πηγής είναι: ……………..

Γ.2. Ο Γιάννης ακούει συνεχώς την ίδια συχνότητα επειδή: ………………………………….

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Γ.3. Η ταχύτητα του Γιάννη είναι: ……………..

Θέμα 2ο

Α.1. Η στροφορμή της ράβδου είναι: ……………..

Α.2. Η ταχύτητα του Κ είναι: ……………..

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της διεύθυνσης της ταχύτητας του Κ είναι: ……………..

Η επιτρόχια επιτάχυνση του Κ είναι: ……………..

Β. Η ταχύτητα του άκρου Β είναι: ……………..

Η στροφορμή της ράβδου ως προς το Ο΄ είναι: ……………..

Θέμα 3ο

Το μέτρο της δύναμης που πρέπει να ασκηθεί στο έμβολο είναι: ……………..

Πειραματικό Μέρος

Α.

Α/Α μέτρησης	1	2	3	4	5	6	7	8
Επιμήκυνση Ελατηρίου *x* (cm)								

Β. Η ζητούμενη σχέση είναι: ……………..

Γ. Η πυκνότητα ρ του υγρού είναι: ……………..

Δ. Να σχεδιάσετε το γράφημα στο μιλιμετρέ χαρτί.

Συνοπτικές Απαντήσεις

Θεωρητικό Μέρος

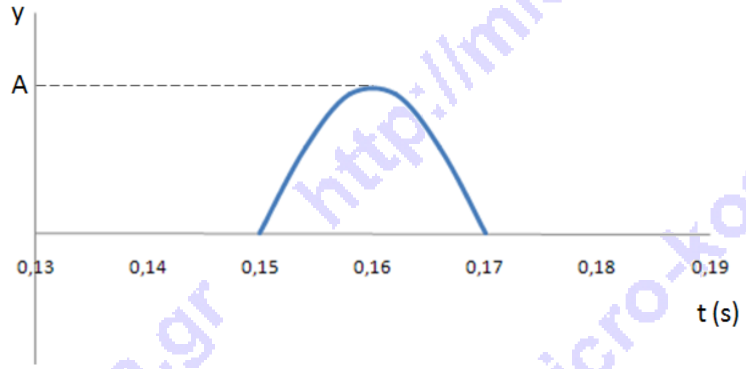
ΘΕΜΑ 1ο

Α.

Α.1. Η διαταραχή φθάνει στο Μ τη χρονική στιγμή 0,11 s και το εγκαταλείπει τη χρονική στιγμή 0,13 s.
Οπότε

$$\upsilon = \frac{1{,}20\,m}{0{,}11\,s} = 10{,}9\,m/s$$

Α.2. Η διαταραχή φθάνει στο Λ τη χρονική στιγμή $t' = \frac{1{,}6\,m}{10{,}9\,s} = 0{,}15\,s$



Β. $I_A > I_\Delta > I_B > I_\Gamma$

Γ.1. Εφαρμόζοντας εξίσωση φαινομένου Doppler για ακίνητο παρατηρητή και πηγή που πλησιάζει προς αυτόν έχουμε:

$$f_A = f_S \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_S} \Rightarrow \upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_S = f_S \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{f_A} \Rightarrow \upsilon_S = \upsilon_{\eta\chi} - f_S \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{f_A} \Rightarrow \upsilon_S = \upsilon_{\eta\chi}\left(1 - \frac{f_S}{f_A}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \upsilon_S = \upsilon_{\eta\chi} \frac{f_A - f_S}{f_A} \Rightarrow \upsilon_S = 350\,m/s \frac{700 - 680}{700} \Rightarrow \upsilon_S = \frac{20}{2}\,m/s \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \upsilon_S = 10\,m/s$$

Γ.2. Η ταχύτητα της πηγής είναι εφαπτομενική στην κυλική τροχιά που αυτή εκτελεί, οπότε η συνιστώσα της κατά μήκος της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς είναι μηδέν. Κατά συνέπεια η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο Γιάννης είναι ίδια με αυτή που εκπέμπει η πηγή.

Γ.3. Θα συμβολίσουμε με $f_1 = f_S$ τη συχνότητα που ακούει ο Κώστας από την (ακίνητη πλέον) πρώτη πηγή και με f_2 τη συχνότητα που ακούει από τη δεύτερη (κινούμενη) πηγή.
Για την περίπτωση του διακροτήματος γνωρίζουμε ότι $f_\Delta = |f_1 - f_2|$
Αφού η δεύτερη πηγή απομακρύνεται από τον Κώστα, η συχνότητα f_2, που αυτός αντιλαμβάνεται θα είναι μικρότερη από την πραγματική f_S.
Άρα, χωρίς την απόλυτη τιμή, έχουμε:

$$f_\Delta = f_1 - f_2 \Rightarrow f_2 = f_1 - f_\Delta \Rightarrow f_2 = f_S - f_\Delta \Rightarrow f_2 = (680 - 2)Hz \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_2 = 678\,Hz$$

Έστω υ_{S_2} η ζητούμενη ταχύτητα του Γιάννη. Εφόσον η f_2 προέρχεται από πηγή που απομακρύνεται από τον παρατηρητή, έχουμε

$$f_2 = f_S \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_{S_2}} \Rightarrow \upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_{S_2} = f_S \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{f_2} \Rightarrow \upsilon_{S_2} = f_S \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{f_2} - \upsilon_{\eta\chi} \Rightarrow \upsilon_{S_2} = \upsilon_{\eta\chi}\left(\frac{f_S}{f_2} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_{S_2} = \upsilon_{\eta\chi}\frac{f_S - f_2}{f_2} \Rightarrow \upsilon_S = 350\, m/s\,\frac{680-678}{678} \Rightarrow \upsilon_S = 350\,\frac{2}{678}\, m/s \Rightarrow$$

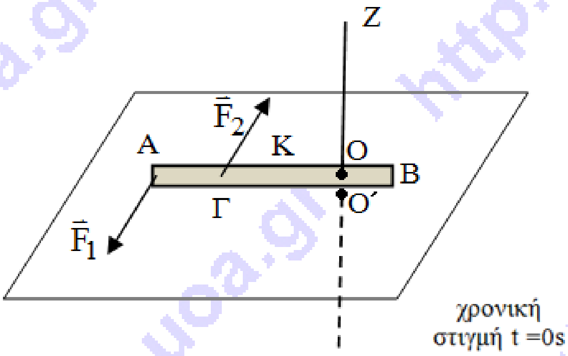
$$\Rightarrow \upsilon_S = \frac{350}{339}\, m/s \Rightarrow \upsilon_S \cong 1{,}03\, m/s$$

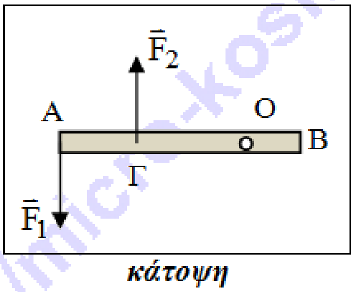
ΘΕΜΑ 2ο

Α. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο σε αυτήν άξονα που περνά από το σημείο Ο είναι:

$$I_o = \frac{1}{12}ML^2 + M(\frac{L}{4})^2 = \frac{7}{48}ML^2 \Rightarrow I_o = 14Kg \cdot m^2$$

Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται η ράβδος σε πλάγια όψη τη χρονική t = 0s. Το σημείο Ο΄ είναι η τομή του άξονα περιστροφής με το επίπεδο. Στο ίδιο σχήμα φαίνεται η ράβδος σε κάτοψη. Το Ο΄ είναι σημείο του επιπέδου ακριβώς κάτω από το Ο.





κάτοψη

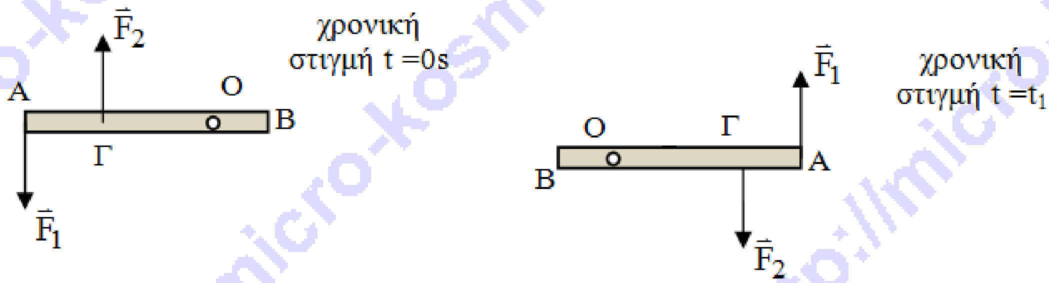
Η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου:

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma\tau_{(o)}}{I_o} = \frac{F\cdot\frac{L}{4}}{I_o} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{10}{7}\frac{rad}{s^2}$$

Η γωνιακή μετατόπιση της ράβδου τη χρονική στιγμή $t_1 = \sqrt{7\pi}s$:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}a_{\gamma\omega\nu}t_1^2 \Rightarrow \Delta\varphi = 5\pi rad$$

Τη στιγμή t_1, η ράβδος έχει εκτελέσει 2,5 περιστροφές και στα δεξιά του επόμενου σχήματος φαίνεται η θέση της:



Την ίδια στιγμή έχει γωνιακή ταχύτητα: $\omega_1 = a_{\gamma\omega\nu} t_1 \Rightarrow \omega_1 = 6,7\dfrac{rad}{s}$

Α.1. Η στροφορμή της ράβδου ως προς το σημείο Ο είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο περιστροφής με φορά προς τα έξω και έχει μέτρο: $L_o = I_o\omega_1 \Rightarrow L_o = 93,8\dfrac{Kg\cdot m^2}{s}$

Α.2. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας Κ της ράβδου είναι: $\upsilon_{cm} = \omega_1\dfrac{L}{4} \Rightarrow \upsilon_{cm} = 6,7\dfrac{m}{s}$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της διεύθυνσης της ταχύτητας, δηλαδή το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του κέντρου μάζας Κ της ράβδου είναι:

$$a_K = \omega_1^2\frac{L}{4} \Rightarrow a_K = 44,9\frac{m}{s^2}$$

Ενώ η επιτρόχια επιτάχυνση του κέντρου μάζας Κ της ράβδου έχει μέτρο:

$$a_\varepsilon = a_{\gamma\omega\nu}\frac{L}{4} \Rightarrow a_\varepsilon = \frac{10}{7}\frac{m}{s^2}$$

Β. Μόλις σπάσει ο άξονας z το κέντρο μάζας Κ θα κινηθεί πλέον ευθύγραμμα, με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_{cm}=\upsilon_y=6,7m/s$ στην διεύθυνση y, κάθετα στην αρχική διεύθυνση της ράβδου, αφού η συνισταμένη δύναμη που δέχεται είναι μηδενική

Όμως επειδή ασκείται πάνω στη ράβδο το ζεύγος δυνάμεων, θα συνεχίσει να επιταχύνεται στροφικά εκτελώντας επιταχυνόμενη στροφική κίνηση, γύρω από κατακόρυφο άξονα ***ο οποίος περνά από το μέσο της Κ (κέντρο μάζας).***

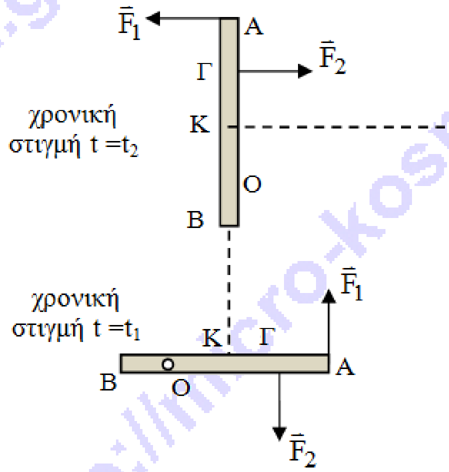
$$\Sigma\tau = I_{CM}\alpha_{1\gamma\omega\nu} \Rightarrow F\cdot d = \left(\frac{1}{12}M\ell^2\right)\alpha_{1\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$a_{1\gamma\omega\nu} = \frac{F\cdot\frac{\ell}{4}}{\frac{1}{12}M\ell^2} = \frac{3F}{M\ell} \Rightarrow a_{1\gamma\omega\nu} = \frac{3\cdot 20}{6\cdot 4} rad/s^2 = 2,5\, rad/s^2.$$

Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου είναι:

$$\omega_2=\omega_1+\alpha_{1\gamma\omega\nu}(t_2-t_1) \Rightarrow$$

$$\omega_2=(6,7+2,5\cdot 1,62)rad/s = 10,75 rad/s.$$



Η γωνιακή μετατόπιση της ράβδου μετά από $\Delta t = 6,31-4,69 = 1,62s$ είναι:

$$\Delta\varphi = \omega_1\Delta t + \frac{1}{2}a_{\gamma\omega\nu 1}\Delta t^2 \Rightarrow \Delta\varphi = 4,5\pi\, rad$$

Το άκρο Β της ράβδου έχει εκείνη τη στιγμή, ταχύτητα λόγω μεταφορικής κίνησης $\upsilon_{cm} = 6,7\dfrac{m}{s}$ και γραμμική ταχύτητα λόγω της κυκλικής γύρω από το Κ:

$$\upsilon_{\gamma\rho} = \omega_2 \frac{L}{2} \Rightarrow \upsilon_{\gamma\rho} = 10,75 \cdot 2 = 21,5 \frac{m}{s}$$

Επειδή $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$ κάθετη στη $\vec{\upsilon}_{cm}$ ισχύει:

$$\upsilon_B = \sqrt{\upsilon^2_{\gamma\rho} + \upsilon^2_{cm}} \Rightarrow \upsilon_B = 22,52 \frac{m}{s}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_{cm}}{\upsilon_{\gamma\rho}} = \frac{6,7}{21,5} = 0,311 \Rightarrow \theta = 17,27^0$$

*Η στροφορμή **στερεού** που εκτελεί **σύνθετη** επίπεδη κίνηση, ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου κίνησης ή κατά άξονα κάθετο σε αυτό, μπορεί να υπολογιστεί ως άθροισμα της στροφορμής λόγω ιδιοπεριστροφής, με μέτρο $L_{cm} = I_{cm}\omega$ και της τροχιακής στροφορμής, με μέτρο $L_{\mu\varepsilon\tau} = M\upsilon_{cm}r$, της στροφορμής δηλαδή **του κέντρου μάζας** ως προς το σημείο ή τον άξονα αναφοράς*

Συνεπώς:

$$L_{cm} = I_{cm}\omega_2 \Rightarrow L_{cm} = 8 \cdot 10,75 = 86 \frac{Kg \cdot m^2}{s}$$

και

$$L_{\mu\varepsilon\tau} = M\upsilon_{cm}\frac{L}{4} \Rightarrow L_{\mu\varepsilon\tau} = 6 \cdot 6,7 = 40,2 \frac{Kg \cdot m^2}{s}$$

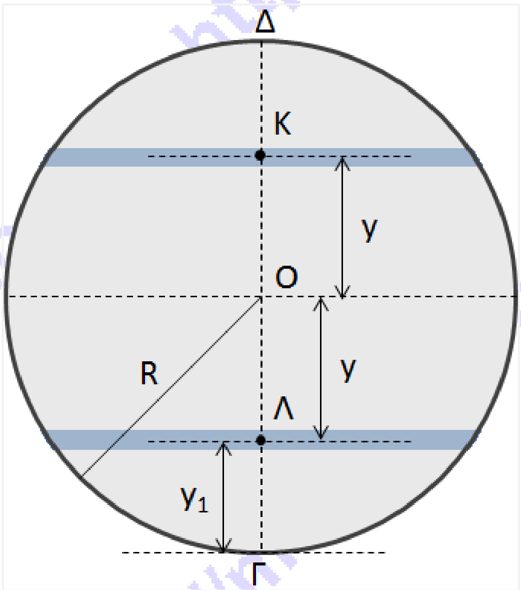
Άρα:

$$L_o = L_{cm} + L_{\mu\varepsilon\tau} \Rightarrow L_o = 86 + 40,2 = 126,2 \frac{Kg \cdot m^2}{s}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Λόγω της πολύ μικρής διατομής του Σ, η πίεση P_1 στο εσωτερικό του θα ισούται με εκείνη που επικρατεί στον πυθμένα του δοχείου Α:

$$P_1 = P_{\alpha\tau\mu} + \rho g h$$



Με βάση την αρχή του Pascal, την ίδια πίεση θα δέχεται και η βάση του εμβόλου (σημείο Γ), ενώ η πίεση σε σημείο έστω Λ που απέχει από τη βάση κατακόρυφη απόσταση y_1 θα είναι:

$$P_\Lambda = P_1 - \rho g y_1 = P_1 - \rho g(R - y)$$

Εφόσον θέλουμε το σύστημα να ισορροπεί, όλα τα σημεία που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο θα δέχονται την ίδια πίεση, δηλ. η πίεση σε όλα τα σημεία της εντονότερα γραμμοσκιασμένης στοιχειώδους επιφάνειας του εμβόλου, η οποία περιέχει το Λ και έχει εμβαδό έστω dS_1, θα δέχονται πίεση P_Λ. Άρα η συνολική στοιχειώδης δύναμη που δέχεται αυτή η επιφάνεια είναι:

$$dF_{κάτω} = P_Λ \cdot dS_1 = [P_1 - ρg(R-y)] \cdot dS_1$$

Το συμμετρικό του Λ (ως προς το κέντρο του εμβόλου Ο) σημείο, έστω Κ, ανήκει σε μια δεύτερη στοιχειώδη επιφάνεια που έχει το ίδιο εμβαδό dS_1, και όλα τα σημεία της δέχονται πίεση:

$$P_K = P_1 - ρg(R+y)$$

Αντίστοιχα, η συνολική στοιχειώδης δύναμη είναι:

$$dF_{πάνω} = P_K \cdot dS_1 = [P_1 - ρg(R+y)] \cdot dS_1$$

Έτσι, η συνισταμένη στοιχειώδης δύναμη dF_1 που δέχονται οι δύο συμμετρικές ως προς το Ο στοιχειώδεις επιφάνειες είναι:

$$dF_1 = dF_{κάτω} + dF_{πάνω} = [P_1 - ρg(R-y)] \cdot dS_1 + [P_1 - ρg(R+y)] \cdot dS_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dF_1 = 2(P_1 - ρgR) \cdot dS_1$$

Δηλ. η dF_1 είναι ανεξάρτητη του y και ανάλογη του dS_1.
Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το έμβολο από το υγρό θα ισούται με το άθροισμα των dF_1, dF_2, ... , $dF_ν$, που προκύπτουν, κατά τρόπο ανάλογο, από τα ζευγάρια των 2ν συμμετρικών στοιχειωδών επιφανειών εμβαδου dS_1, dS_2, ... , $dS_ν$, στις οποίες χωρίζουμε την επιφάνεια του εμβόλου, δηλ.

$$F_{υγρ} = \sum_{i=1}^{ν} dF_i = \sum_{i=1}^{ν} 2(P_1 - ρgR) \cdot dS_i = 2(P_1 - ρgR) \cdot \sum_{i=1}^{ν} dS_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{υγρ} = 2(P_1 - ρgR) \cdot \frac{S_{πιστ}}{2}$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι το μέτρο της δύναμης που δέχεται το έμβολο από το υγρό είναι:

$$F_{υγρ} = (P_1 - ρgR) \cdot S_{εμβ} \Rightarrow F_{υγρ} = \left(P_{ατμ} + ρgh - ρgR\right) \cdot S_{εμβ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{υγρ} = \left(P_{ατμ} + ρg3R - ρgR\right) \cdot S_{εμβ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{υγρ} = \left(P_{ατμ} + ρg2R\right) \cdot S_{εμβ}$$

Στην εξωτερική του επιφάνεια, το έμβολο δέχεται την ατμοσφαιρική πίεση, η οποία αντιστοιχεί σε αντίρροπη δύναμη μέτρου:

$$F_{ατμ} = P_{ατμ} \cdot S_{εμβ}$$

Συνεπώς το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το έμβολο είναι:

$$F_{ολ} = F_{υγρ} - F_{ατμ} \Rightarrow F_{ολ} = ρg2R \cdot S_{εμβ}$$

Για να μην εκτελεί το έμβολο μεταφορική κίνηση θα πρέπει να ασκήθεί σε αυτό δύναμη ίσου μέτρου με φορά (στο αρχικό σχήμα) προς τα δεξιά, δηλ το μέτρο της εξωτερικής δύναμης θα είναι:

$$F_{εξ} = ρg2R \cdot S_{εμβ} \Rightarrow F_{εξ} = ρg2R \cdot πR^2$$

$$\Rightarrow F_{εξ} = 2πρgR^3$$

Πειραματικό Μέρος

Α. Από τη γεωμετρία της διάταξης έχουμε ότι $L = L_o + x \Rightarrow x = L - L_o$, οπότε ο πίνακας θα είναι:

Α/Α μέτρησης	1	2	3	4	5	6	7	8
Επιμήκυνση Ελατηρίου *x* (cm)	31,5	30,5	30	29,5	29,2	28,8	28,3	27,8

Β. Ορίζουμε ως θετική φορά αυτή του βάρους (προς τα κάτω). Για την ισορροπία του κυλίνδρου στο υγρό ισχύει:

$$w = F_{\varepsilon\lambda} + A$$

όπου w το βάρος του κυλίνδρου, $F_{\varepsilon\lambda}$ η δυναμη του ελατηρίου και A η άνωση με $A = \rho g V_{\beta\upsilon\theta} \Rightarrow$
$\Rightarrow A = \rho g(\pi r^2 h)$.

$$kx = mg - \rho g h \pi r^2 \qquad \acute{\alpha}\rho\alpha$$

$$x = \frac{mg}{k} - \frac{\rho g \pi r^2}{k} h$$

Γ. Από τα αποτελέσματα του ερωτήματος Α σε συνδυασμό με τα δεδομένα του προβλήματος εφαρμόζουμε τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων, από την οποία προκύπτει: $\alpha = \frac{mg}{k} = 32{,}236$ cm, από όπου υπολογίζουμε τη σταθερά k του ελατηρίου:

$$k = 30{,}40079\ N/m \Rightarrow k \cong 30{,}4\ N/m$$

Από την κλίση $\beta = -\frac{\rho g \pi r^2}{k} = -0{,}8811$ και με βάση την ανωτέρω προσεγγιστική τιμή του k υπολογίζουμε την πυκνότητα $\rho = 967{,}165\ kg/m^3$. Άρα

$$\rho \cong 967\ kg/m^3$$

Δ. Το ζητούμενο γράφημα είναι το παρακάτω: