Γ΄ Λυκείου

10 Απριλίου 2010

Θεωρητικό μέρος

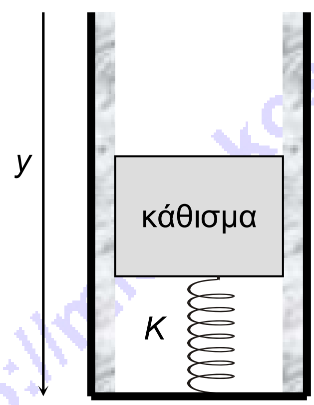
Θέμα 1ο

Α. Η ειδική θεωρία της σχετικότητας προβλέπει την ισοδυναμία μάζας-ενέργειας $E=mc^2$. Επίσης η γενική θεωρία της σχετικότητας προβλέπει ότι το φώς δε διαδίδεται ευθύγραμμα λόγω της παρουσίας πολύ ισχυρών βαρυτικών πεδίων. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα φωτόνια έλκονται από αντικείμενα με πολύ μεγάλη μάζα και να τους προσδώσουμε μια ισοδύναμη βαρυτική μάζα.
i. Βρείτε την ισοδύναμη βαρυτική μάζα ενός φωτονίου με συχνότητα f.
ii. Έστω ένα φωτόνιο συχνότητας f_0 το οποίο εκπέμπεται από την επιφάνεια ενός αστέρα με μάζα M και ακτίνα R όπου το βαρυτικό πεδίο είναι πολύ ισχυρό και τελικά φτάνει στη Γη όπου το βαρυτικό πεδίο δεν είναι πολύ ισχυρό (η μάζα της Γης είναι πολύ μικρή σε σχέση με τη μάζα του αστέρα και η απόστασή της από αυτόν είναι πολύ μεγάλη). Να δείξετε με τη βοήθεια της αρχής διατήρησης της ενέργειας ότι η συχνότητα f του φωτονίου όταν αυτό φθάνει στη Γη θα είναι μικρότερη της f_0. Υποθέστε ότι ο αστέρας είναι ακίνητος ως προς τη Γη. Θυμηθείτε ότι η βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός συστήματος δύο σωμάτων με μάζες M και m, δίνεται από τη σχέση $U=-\dfrac{GMm}{r}$.
iii. Βρείτε την κρίσιμη ακτίνα R_{crit} του αστέρα ώστε η συχνότητα f να είναι μηδέν. Αυτό θα σήμαινε ότι το φωτόνιο δεν θα έφτανε ποτέ στη Γη και ο αστέρας θα ήταν μια μαύρη τρύπα.
iv. Ο ήλιος έχει μάζα M_H=2 10^{30}kg και ακτίνα R_H=7 10^5 km. Ποια θα έπρεπε να είναι η ακτίνα του ώστε να ήταν μαύρη τρύπα; Δίνεται: η σταθερά της παγκόσμιας έλξης G= 6,67 10^{-11}Nm^2/kg^2 και c=3 10^8 m/s.

Β. Ένας κυκλικός βρόχος με ακτίνα R=50mm ο οποίος είναι κατασκευασμένος από ένα πολύ λεπτό σύρμα έχει συντελεστή αυτεπαγωγής L=0.26μH και εισάγεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο B=0,50mT. Το επίπεδο του βρόχου είναι κάθετο στις μαγνητικές γραμμές του πεδίου. Στη συνέχεια ο βρόχος ψύχεται σε πολύ χαμηλή θερμοκρασία και έρχεται σε υπεραγώγιμη κατάσταση όπου μηδενίζεται η αντίστασή του. Μόλις συμβεί αυτό μηδενίζουμε το μαγνητικό πεδίο. Βρείτε το ηλεκτρικό ρεύμα που θα κυκλοφορεί στο βρόχο.

Θέμα 2ο

Τα ηλεκτροροϊκά υγρά χρησιμοποιούνται κυρίως ως στοιχεία μεταβαλλόμενης απόσβεσης και λειτουργούν υπό την αλληλεπίδραση ηλεκτρικού πεδίου. Ένα αυτόματο μηχανικό σύστημα ενεργού απόσβεσης φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα. Το μεταλλικό κάθισμα με δεδομένη μάζα M, μπορεί να κινείται κατακόρυφα μέσα σε ένα μεταλλικό κύλινδρο. Το εσωτερικό τοίχωμα του κυλίνδρου είναι επικαλυμμένο με ένα λεπτό στρώμα ηλεκτροροϊκού (ER) υγρού. Η τριβή μεταξύ του καθίσματος και του τοιχώματος είναι $f=-bv$, όπου v η ταχύτητα του καθίσματος σε σχέση με το τοίχωμα, και b μια σταθερά απόσβεσης. Η b του ηλεκτροροϊκού υγρού μπορεί να ρυθμίζεται από μια τάση η οποία εφαρμόζεται μεταξύ του καθίσματος και του τοιχώματος. Στον πυθμένα του κυλίνδρου υπάρχει ένα κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο με δεδομένη σταθερά K



και φυσικό μήκος d. Το ελατήριο είναι δεμένο στον πυθμένα του κυλίνδρου και στο κάθισμα. Δίνεται η επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας g.

- **i)** Επιλέξτε την αρχή του άξονα y στο φυσικό μήκος του ελατηρίου και θετική φορά προς τα κάτω. Γράψτε μια έκφραση για την επιτάχυνση του καθίσματος όταν αυτό βρίσκεται στην τυχαία θέση $+y$ και κινείται με ταχύτητα v προς τα κάτω.
- **ii)** Καθορίστε τη θέση ισορροπίας του καθίσματος ως συνάρτηση των δεδομένων.
- **iii)** Υποθέστε ότι το κάθισμα είναι ακίνητο στη θέση ισορροπίας και τη χρονική στιγμή t=0 δέχεται ένα χτύπημα προς τα κάτω που του προσδίδει δεδομένη αρχική ταχύτητα v_0. Η σταθερά b αυτή τη χρονική στιγμή t=0, έχει μια επιλεγμένη δεδομένη τιμή b_0. Βρείτε την επιτάχυνση a_0 του καθίσματος τη στιγμή αυτή σε συνάρτηση με δεδομένα μεγέθη.
- **iv)** Θέτουμε σε λειτουργία το σύστημα της ενεργού απόσβεσης και ρυθμίζουμε την τιμή της b μέσω της εφαρμοζόμενης τάσης. Βρείτε πώς πρέπει να μεταβάλλεται η τιμή της b σε σχέση με το χρόνο ώστε η επιτάχυνση του καθίσματος να παραμένει σταθερή και ίση με a_0 μέχρι που το κάθισμα επιβραδυνόμενο να ακινητοποιηθεί.
- **v)** Βρείτε την απόσταση s που διένυσε το κάθισμα επιβραδυνόμενο μέχρι να ακινητοποιηθεί ως συνάρτηση των δεδομένων και της a_0.
- **vi)** Βρείτε την αύξηση της θερμικής ενέργειας του συστήματος μέχρι την ακινητοποίηση του καθίσματος σε σχέση με τα δεδομένα ή μεγέθη που έχετε είδη εκφράσει συναρτήσει των δεδομένων.

Θέμα 3^o

Α. Ένα μεσόνιο αποτελείται από δύο quarks και η αλληλεπίδραση μεταξύ των quarks είναι περίπλοκη. Η έρευνα του μεσονίου μπορεί να γίνει με τη μελέτη ανελαστικών κρούσεων του μεσονίου με ηλεκτρόνια υψηλής ενέργειας. Επειδή το φαινόμενο είναι περίπλοκο, έχουμε επινοήσει ένα απλοποιημένο πρότυπο (μοντέλο) το οποίο είχε προταθεί στη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων από τον Richard Feynman το 1969. Το πρότυπο αυτό ονομάστηκε “parton model”. Το ηλεκτρόνιο πρώτα συγκρούεται ελαστικά με το ένα από τα quarks του μεσονίου και στη συνέχεια η ενέργεια και η ορμή μεταφέρεται στο άλλο quark, συνεπώς σε ολόκληρο το μεσόνιο μέσω της αλληλεπίδρασης των quarks. Αυτό το απλοποιημένο μοντέλο φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

Ένα ηλεκτρόνιο με μάζα M και ενέργεια E συγκρούεται με το ένα quark μάζας m_1 του μεσονίου. Το άλλο quark του μεσονίου έχει μάζα m_2. Τα quarks στο μοντέλο αυτό, είναι συνδεδεμένα με ένα ιδανικό ελατήριο και βρίσκονται σε ισορροπία πριν την κρούση. Θεωρήστε όλες τις κινήσεις ευθύγραμμες και αγνοήστε τα σχετικιστικά φαινόμενα.

- **i)** Βρείτε, αμέσως μετά την κρούση, την ενέργεια E_1 που μεταβιβάστηκε στο quark με μάζα m_1 από το ηλεκτρόνιο σε συνάρτηση με τα M, m_1, και E.
- **ii)** Βρείτε την κινητική ενέργεια E_μ του κέντρου μάζας του μεσονίου, η οποία είναι και η κινητική ενέργεια του μεσονίου ως σύστημα, σε συνάρτηση με τα M, m_1, m_2 και E. Λάβετε υπ’ όψιν ότι το κέντρο μάζας ενός συστήματος κινείται σαν ένα υποθετικό υλικό σημείο με μάζα ίση με τη συνολική μάζα του συστήματος αν

θεωρήσουμε ότι όλες οι εξωτερικές δυνάμεις που δέχεται το σύστημα ασκούνται σ' αυτό.

iii) Βρείτε την εσωτερική ενέργεια $E_{εσ}$ του μεσονίου η οποία εκφράζεται από την ενέργεια της ταλάντωσης των quarks, σε συνάρτηση με τα M, m_1, m_2 και E.

Β. Ηλεκτρόνια αφού επιταχυνθούν από τάση 20 kV κινούνται οριζόντια. Ένας πειραματιστής θέλει να καμπυλώσει την τροχιά τους ώστε αυτά να κινούνται κατακόρυφα με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα χρησιμοποιώντας ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Αυτό το ηλεκτρικό πεδίο είναι περιορισμένο σε μια τετραγωνική περιοχή με πλευρά 5cm. Βρείτε την κατεύθυνση και το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου E που απαιτείται γι' αυτό.

Πειραματικό μέρος

Μια ακίνητη πηγή εκπέμπει αρμονικό ήχο με συχνότητα f_0. Ένας παρατηρητής ο οποίος κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα v, τη χρονική στιγμή t=0 είναι σε μεγάλη απόσταση από την πηγή και κατευθύνεται προς αυτήν όμως η ευθύγραμμη τροχιά του δεν περνά ακριβώς από την πηγή. Κατά τη διάρκεια της κίνησής του ο παρατηρητής ακούει ήχο του οποίου η συχνότητα f μεταβάλλεται με το χρόνο. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι συχνότητες του ήχου τις οποίες κατέγραψε ο παρατηρητής και οι αντίστοιχες χρονικές στιγμές. Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι 330 m/s^2.

f **(Hz)**	***t*** **(s)**
210,4	0
210,4	30,0
210,0	60,0
208,0	70,0
199,5	75,0
185,8	80,0
182,1	90,0
181,6	120,0
181,6	150,0

(i) Εξηγείστε γιατί η συχνότητα του ήχου που ακούει ο παρατηρητής κατά τη διάρκεια της κίνησής του, αρχικά είναι σταθερή στη συνέχεια μειώνεται και τελικά σταθεροποιείται;

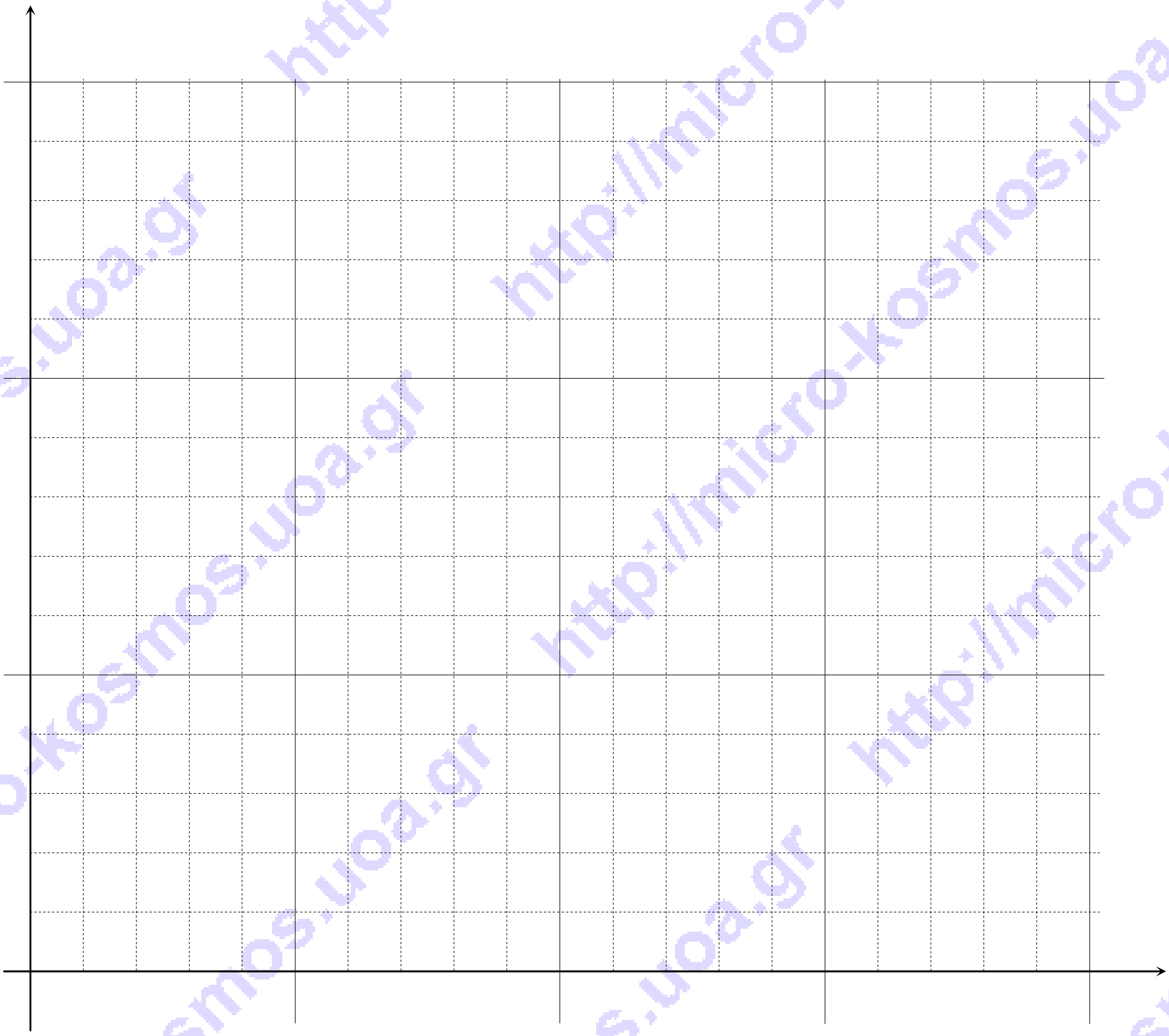
(ii) Από τα αρχικά και τελικά δεδομένα του πίνακα υπολογίστε τη συχνότητα f_0 του ήχου που εκπέμπει η πηγή και την ταχύτητα v του παρατηρητή.

(iii) Κάντε το γράφημα της συχνότητας σε σχέση με το χρόνο και καθορίστε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο παρατηρητής βρίσκεται στη μικρότερη απόστασή του από την πηγή.

Καλή Επιτυχία

Αν θέλετε, μπορείτε να κάνετε το γράφημα σ' αυτή τη σελίδα και να την επισυνάψετε μέσα στο τετράδιό σας.

Επιλέξτε τους άξονες τιτλοδοτήστε συμπεριλάβετε και τις κατάλληλες μονάδες σε κάθε άξονα.



Συνοπτικές λύσεις

Θεωρητικό μέρος

Θέμα 1ο

Α.

i. $E=mc^2$ (1) και $E=hf$ (2) Από (1) και (2) προκύπτει ότι $m=\frac{hf}{c^2}$ (3)

ii. Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε:

$hf_0-G\frac{Mm}{R}=hf$ η οποία με τη βοήθεια της (3) γίνεται: $hf_0-G\frac{Mhf_0}{Rc^2}=hf$ οπότε

$$f=f_0\left(1-\frac{GM}{Rc^2}\right) \quad (4)$$ από την οποία $f<f_0$

iii. Για $f=0$ προκύπτει από την (4) ότι: $R_{crit}=\frac{GM}{c^2}$ (5)

iv). Αντικαθιστώντας βρίσκουμε: $R=4{,}45$ km

Β.

Από το δεύτερο κανόνα του Κίρχωφ και επειδή R=0 έχουμε: $E_{ολ}=IR=0$. Όμως:

$E_{ολ}=E_{επ}+E_{αυτ}=-\frac{\pi R^2\Delta B}{\Delta t}-L\frac{\Delta I}{\Delta t}=0 \Rightarrow -\frac{\pi R^2(0-B)}{\Delta t}-L\frac{I-0}{\Delta t}=0$ Από την οποία:

$I=\frac{\pi R^2 B}{L}$ =15A

Θέμα 2ο

i. Η έκφραση για την επιτάχυνση είναι:

$$a=\frac{mg-bv-ky}{m}$$

ii. Η θέση ισορροπίας ως συνάρτηση των δεδομένων

$$y_0=\frac{mg}{k}$$

iii. Η έκφραση για την επιτάχυνση αυτή τη στιγμή ως συνάρτηση των δεδομένων

$$a_0=-\frac{b_0v_0}{m}$$

iv. Η χρονική εξέλιξη της τιμής της b

$$b=\frac{mg-ma_0-ky(t)}{v(t)}$$

Όπου $v(t)=v_0-a_0t$

$y(t)=y_0+v_0t-\frac{1}{2}a_0t^2$ τελικά: $b=\frac{kb}{2m}t^2-kt-b_0$

v. Η απόσταση που διένυσε το κάθισμα:

$y_{o\lambda}=\frac{mg}{k}+v_0t_{o\lambda}-\frac{1}{2}\alpha_0 t_{o\lambda}^2$

όπου $t_{o\lambda}=\frac{v_0}{a_0}$

vi. $\Delta E=E_{\alpha\rho\chi}-E_{\tau\varepsilon\lambda}=\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}ky_0^2-\frac{1}{2}k(y_{o\lambda}+y_0)^2-mgy_{o\lambda}$

Θέμα 3^o

Α.

i. Έστω v_0 η ταχύτητα του ηλεκτρονίου πριν την ελαστική κρούση του με το ένα quark του μεσονίου μάζας m_1. Αμέσως μετά την κρούση το quark αυτό θα έχει ταχύτητα:

$$v_1=\frac{2Mv_0}{M+m_1} \quad (1)$$

Η ενέργεια E_1 που μεταβιβάστηκε στο quark με μάζα m_1 από το ηλεκτρόνιο είναι:

$E_1=\frac{1}{2}m_1v_1^2=\frac{1}{2}m_1(\frac{2M}{M+m_1}v_0)^2$ και επειδή $E=\frac{1}{2}Mv_0^2$ (2)

προκύπτει: $E_1=\frac{4Mm_1}{(M+m_1)^2}E$ (3)

ii. Αμέσως μετά την κρούση του ηλεκτρονίου με το quark μάζας m_1 το μεσόνιο (σύστημα των δύο quarks) δε δέχεται εξωτερικές δυνάμεις συνεπώς θα διατηρείται η ορμή του, δηλαδή:

$m_1v_1=(m_1+m_2)V_c$ και $V_c=\frac{m_1}{m_1+m_2}v_1$ η οποία με τη βοήθεια της (1) δίνει:

$$V_c=\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{2M}{M+m_1}v_0 \quad (4)$$

Η κινητική ενέργεια του μεσονίου θα είναι: $E_\mu=\frac{1}{2}(m_1+m_2)V_c^2$,όπου V_c η ταχύτητα του κέντρου μάζας του μεσονίου, η οποία με τη βοήθεια των (4) και (2) δίνει:

$$E_\mu=\frac{4Mm_1^2}{(M+m_1)^2(m_1+m_2)}E \quad (5)$$

iii. Η εσωτερική ενέργεια του μεσονίου θα είναι ίση με τη διαφορά της κινητικής ενέργειας που μεταφέρθηκε στο quark με μάζα m_1 από το ηλεκτρόνιο μείον την κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας του μεσονίου $E_{\varepsilon\sigma}=E_1-E_\mu$ η οποία με τη βοήθεια των (3) και (5) δίνει:

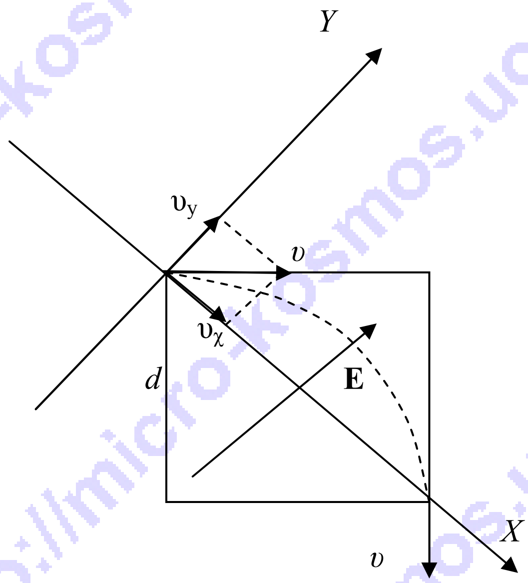
$$E_{\varepsilon\sigma}=\frac{4Mm_1m_2}{(M+m_1)^2(m_1+m_2)}E$$

B.

$$Ve=\frac{1}{2}mu^2 \quad \text{δηλ. } \upsilon=\sqrt{\frac{2Ve}{m}} \qquad (1)$$

$$y=\frac{\upsilon\sqrt{2}}{2}t-\frac{1}{2}\frac{Ee}{m}t^2 \qquad (3)$$

$$x=\frac{\upsilon\sqrt{2}}{2}t \qquad (4)$$



Απαλείφοντας το χρόνο από τις (3) και (4) βρίσκουμε την εξίσωση τροχιάς:

$$y=-\frac{Ee}{m\upsilon^2}x^2+x \qquad (5)$$

Το σημείο εξόδου θα έχει συντεταγμένες ($d\sqrt{2}$,0). Θέτοντας στην (5) y=0 και x=$d\sqrt{2}$ έχουμε:

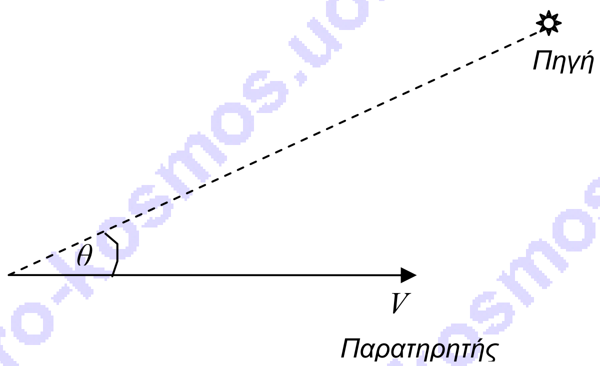
$$E=\frac{m\upsilon^2}{ed\sqrt{2}}$$ και από την (1) παίρνουμε:

$$E=\frac{2V}{d\sqrt{2}}$$

δηλαδή $E= 4\cdot\sqrt{2}\cdot 10^5$ V/m

Πειραματικό μέρος

i.



Η συνιστώσα της ταχύτητας κατά την κατεύθυνση της πηγής είναι $v\cos\theta$. Έτσι όταν ο παρατηρητής πλησιάζει η συχνότητα που ακούει:

$$f=\frac{v_{ηχ}+v\cos\theta}{v_{ηχ}}f_0$$

Καθώς η θ αυξάνεται ο παράγοντας $v\cos\theta$ μειώνεται και έτσι μειώνεται και η τιμή της f.
Όταν είναι πολύ μακρυά από την πηγή το cosθ είναι περίπου 1 σταθερό συνεπώς και η συχνότητα.
Όταν ο παρατηρητής απομακρύνεται η συχνότητα που ακούει:

$$f = \frac{v_{\eta\chi} - v\cos\theta}{v_{\eta\chi}} f_0 .$$

Καθώς η θ μειώνεται ο παράγοντας vcosθ αυξάνεται και έτσι συνεχίζει να μειώνεται και η τιμή της f.

Όταν είναι πολύ μακρυά από την πηγή το cosθ είναι πάλι περίπου 1 σταθερό συνεπώς και η συχνότητα.

ii. Για τους αρχικούς χρόνους αφού $\cos\theta \approx 1$.

$$f=210{,}4=\left(\frac{v_{\eta\chi}+\mathrm{v}}{\mathrm{v}_{\eta\chi}}\right)f_0$$

Για τους τελικούς χρόνους αφού πάλι $\cos\theta \approx 1$.

$$f= 181{,}6= \left(\frac{v_{\eta\chi}-\mathrm{v}}{\mathrm{v}_{\eta\chi}}\right)f_0$$

Από τις παραπάνω με διαίρεση κατά μέλη

$$\frac{210{,}4}{181{,}6}=\frac{v_{\eta\chi}+\mathrm{v}}{\mathrm{v}_{\eta\chi}-\mathrm{v}}$$

Οπότε προκύπτει:

$$v=24{,}24 \text{ m/s}$$

Αντικαθιστώντας στην

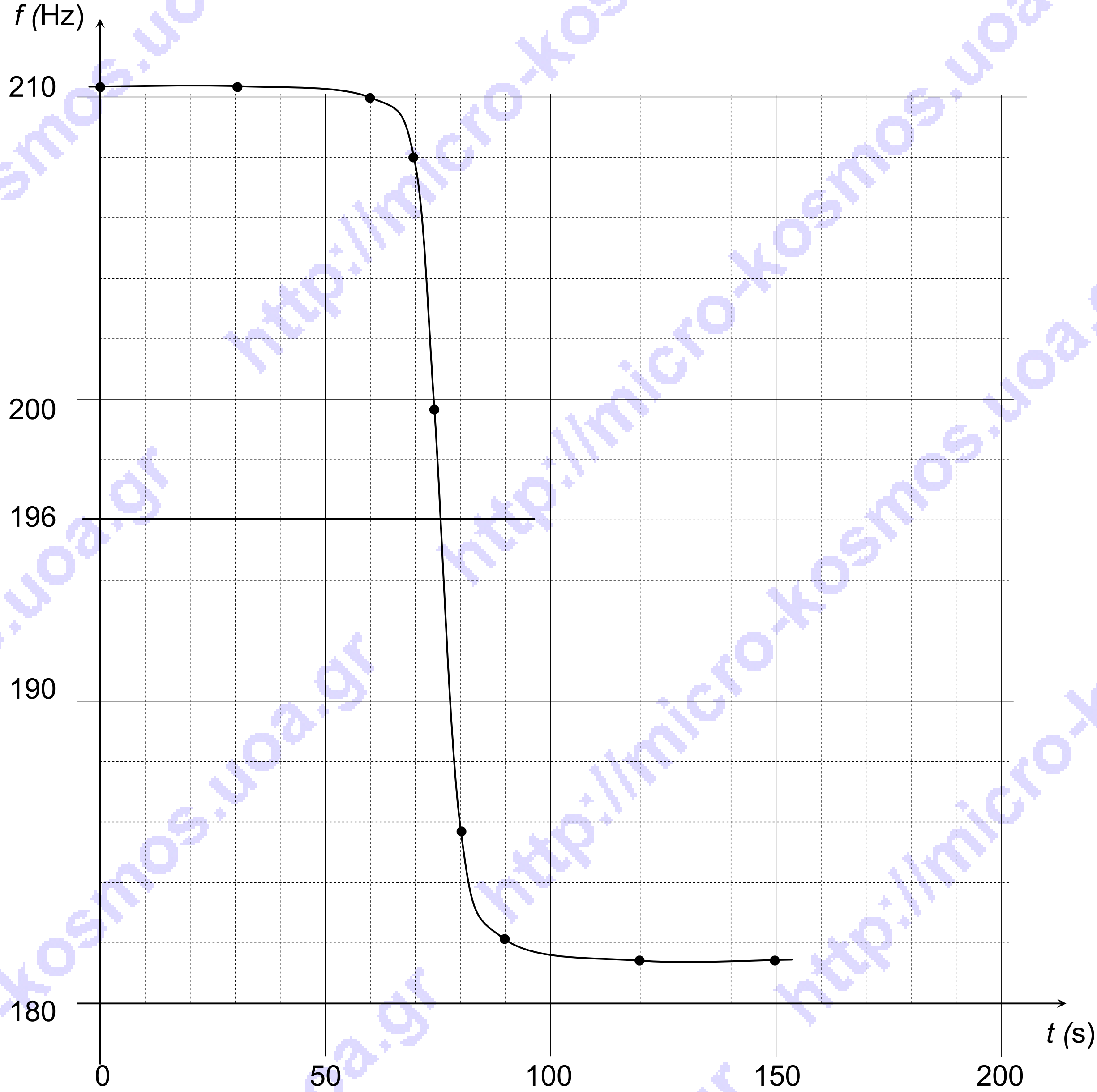
$$f=\left(\frac{v_{\eta\chi}+\mathrm{v}}{\mathrm{v}_{\eta\chi}}\right)f_0$$

Προκύπτει:

$$f_0=196{,}0 \text{ Hz}$$

iii. Στο σημείο της ελάχιστης προσέγγισης στην πηγή θα ισχύει cosθ=0 αφού $\theta=90^0$
Τότε $f=f_0=196{,}0$ Hz.

Από το παρακάτω γράφημα βρίσκουμε ότι η f=196,0Hz αντιστοιχεί τη χρονική στιγμή $t_0=75{,}5\pm\ 1{,}0$s


f (Hz)
210
200
196
190
180
t (s)
0
50
100
150
200