

ΕΝΩΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΚΥΠΡΟΥ

33^Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (Α' Φάση)

Κυριακή, 16 Δεκεμβρίου 2018

Ώρα: 10:00 - 13:00



Οδηγίες:

- 1) Το δοκίμιο αποτελείται από επτά (7) σελίδες και πέντε (5) θέματα.
- 2) Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα του δοκιμίου.
- 3) Κάθε θέμα βαθμολογείται με 20 μονάδες. Σε κάθε θέμα οι μονάδες κάθε ερωτήματος φαίνονται στο τέλος του ερωτήματος.
- 4) Στο τετράδιο απαντήσεων να αναγράφεται ξεκάθαρα ο αριθμός του θέματος και του ερωτήματος που απαντάτε.
- 5) Επιτρέπεται η χρήση μόνο μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- 6) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- 7) Επιτρέπεται η χρήση ΜΟΝΟ μπλε μελανιού. (Οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
- 8) Τα σχήματα των θεμάτων δεν είναι υπό κλίμακα.
- 9) Δίνεται: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Μια ράβδος μήκους $l = 0,500 \text{ m}$ και μάζας $m = 1,60 \text{ kg}$ συγκρατείται οριζόντια με τη βοήθεια άρθρωσης στο σημείο Α και του νήματος ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σημείο Δ απέχει $0,5 \text{ m}$ από το σημείο Α.

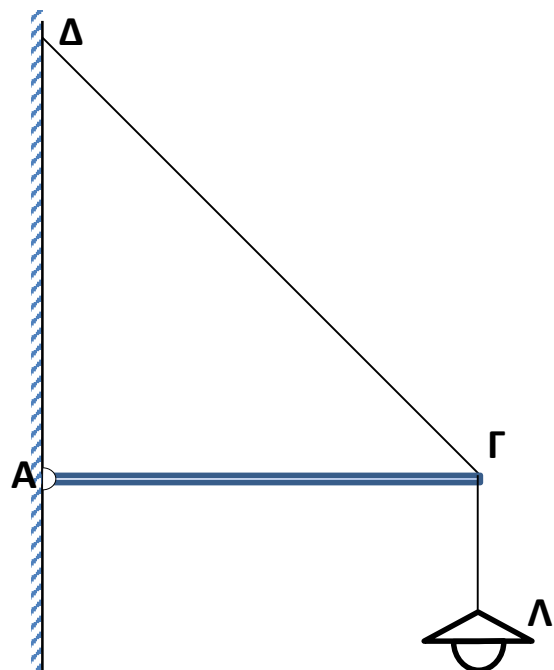
Στο άκρο Γ της ράβδου είναι κρεμασμένη με νήμα μια λάμπα Λ μάζας $M = 2,00 \text{ kg}$.

α. Να αντιγράψετε το σχήμα στο τετράδιο απαντήσεων και να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται **στη ράβδο**. Να κατονομάσετε αυτές τις δυνάμεις.

(μονάδες 4)

β. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο.

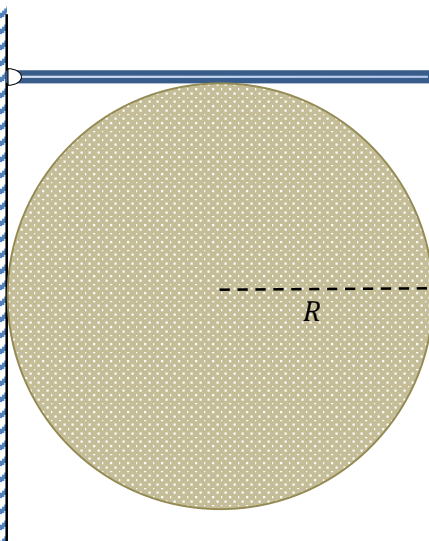
(μονάδες 6)



- γ. Αν η μέγιστη τάση για την οποία το νήμα ΓΔ δεν κόβεται είναι 32 N, να υπολογίσετε τη μέγιστη απόσταση από το σημείο Α του σημείου της ράβδου, στο οποίο μπορεί να κρεμαστεί η λάμπα. (μονάδες 4)

Β. Μια ράβδος μάζας m και μήκους $2R$ έχει το ένα άκρο της στερεωμένο σε άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Η ράβδος αρχικά συγκρατείται οριζόντια από το άλλο της άκρο. Στη συνέχεια τοποθετείται κάτω από τη ράβδο ένας δίσκος μάζας m και ακτίνας R , έτσι ώστε να ακουμπά και στον κατακόρυφο τοίχο και στην οριζόντια ράβδο. Ο συντελεστής στατικής τριβής του δίσκου με τον τοίχο είναι μ_τ και του δίσκου με τη ράβδο είναι μ_ρ .

Να υπολογίσετε τις ελάχιστες τιμές των συντελεστών τριβής μ_τ και μ_ρ για τις οποίες όταν ο δίσκος και η ράβδος αφεθούν δεν θα πέσουν.

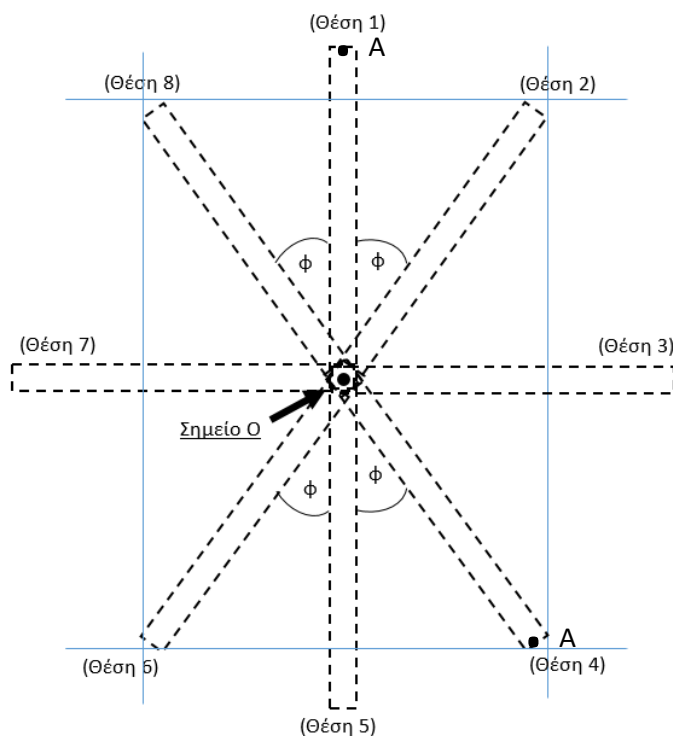


(μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2^ο

Μια ράβδος μήκους l και μάζας m μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα ο οποίος περνά από το σημείο Ο, το οποίο βρίσκεται στο άκρο της ράβδου. Η ράβδος αφήνεται από την θέση 1 και ακολουθεί την εξής πορεία:

Θέση 1 → Θέση 2 → Θέση 3 → Θέση 4 → Θέση 5 → Θέση 6 → Θέση 7 → Θέση 8 → Θέση 1.



α. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Α της ράβδου, στη θέση 4.

(μονάδες 3)

β. Να γράψετε σε ποια/ποιες από τις θέσεις 1 – 8, η ράβδος έχει:

i. τη μέγιστη συνισταμένη ροπή. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(μονάδες 3)

ii. τη μέγιστη γωνιακή επιτάχυνση. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(μονάδες 2)

iii. τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(μονάδες 2)

iv. τη μέγιστη κινητική ενέργεια. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(μονάδες 2)

γ. Να κατατάξετε σε φθίνουσα σειρά, για τις θέσεις 1-8:

i. τα μέτρα της συνισταμένης ροπής στη ράβδο. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

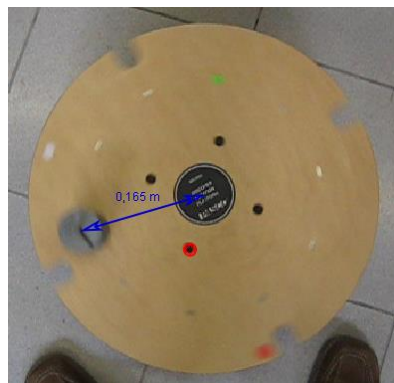
(μονάδες 4)

ii. τα μέτρα των γωνιακών ταχυτήτων της ράβδου. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

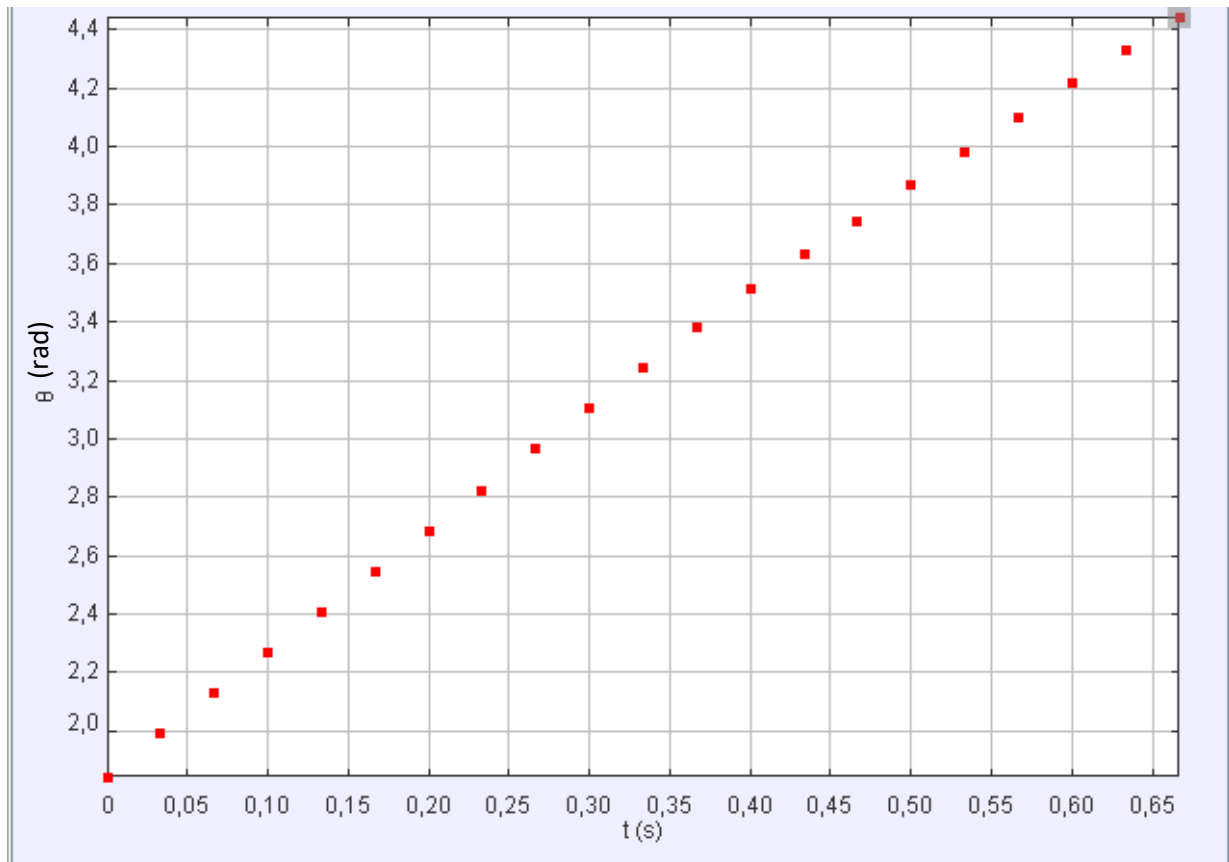
(μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. Μια ομάδα μαθητών πραγματοποίησε ένα πείραμα με στόχο να υπολογίσει τη ροπή αδράνειας μιας περιστρεφόμενης πλατφόρμας. Για το σκοπό αυτό έθεσε την πλατφόρμα σε περιστροφή και σε κάποια στιγμή ένα μέλος της ομάδας άφησε από μικρό ύψος να πέσει στην πλατφόρμα μια δέσμη σταθμών συνολικής μάζας 1 kg. Η δέσμη πέφτει σε απόσταση 16,5 cm από το κέντρο της πλατφόρμας. Στις πιο κάτω εικόνες φαίνεται η πλατφόρμα πριν και μετά την πτώση των σταθμών.



Η ομάδα κατέγραψε σε γραφική παράσταση τη γωνία περιστροφής θ (σε rad) της πλατφόρμας σε συνάρτηση με τον χρόνο. Η γραφική παράσταση που προέκυψε φαίνεται πιο κάτω.



α. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της πλατφόρμας.

(μονάδες 6)

β. Να εξηγήσετε γιατί ελαττώνεται η γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας.

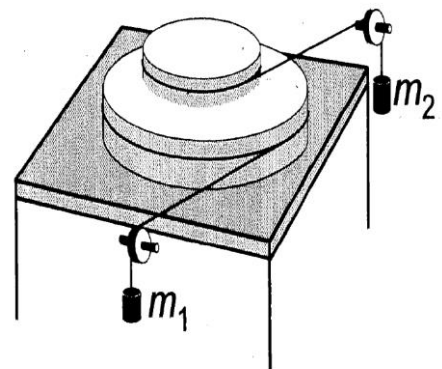
(μονάδες 2)

γ. Να υπολογίσετε τον λόγο της τελικής περιστροφικής κινητικής ενέργειας του συστήματος δίσκος – σταθμά ως προς την αρχική περιστροφική κινητική ενέργεια. Να εξηγήσετε που οφείλεται η διαφορά μεταξύ τους.

(μονάδες 4)

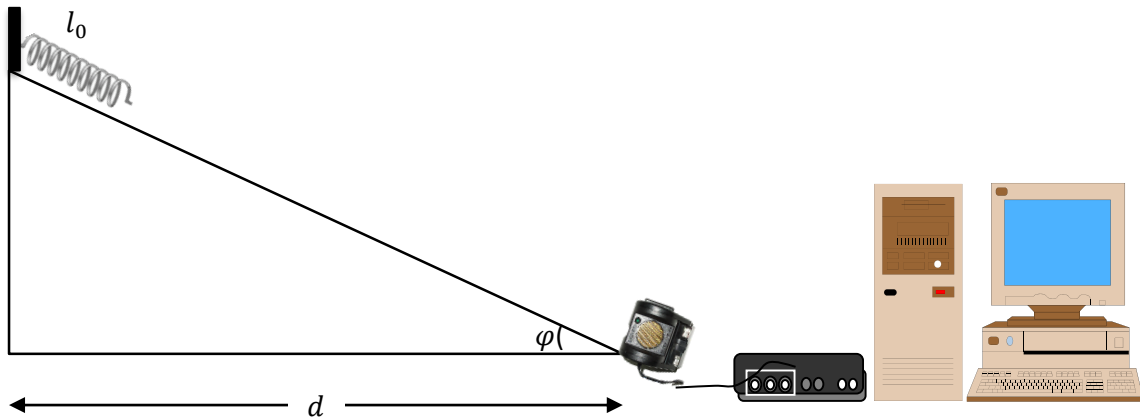
Β. Δύο δίσκοι με ακτίνες $R_1 = 0,3 \text{ m}$ και $R_2 = 0,2 \text{ m}$ έχουν στερεωθεί μεταξύ τους με τέτοιο τρόπο ώστε τα κέντρα τους να είναι το ένα πάνω από το άλλο. Η ροπή αδράνειας του συστήματος των δύο δίσκων είναι ίση με $I = 0,25 \text{ kgm}^2$. Ο μεγαλύτερος δίσκος ακουμπά σε λείο οριζόντιο τραπέζι. Νήματα αμελητέας μάζας είναι τυλιγμένα γύρω από τους δύο δίσκους και είναι συνδεδεμένα μέσω τροχαλιών αμελητέας μάζας με δύο σώματα με μάζες $m_1 = 5 \text{ kg}$ και m_2 , όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα νήματα δεν ολισθαίνουν στους δίσκους. Να υπολογίσετε την τιμή της άγνωστης μάζας m_2 , για την οποία ο άξονας που διέρχεται από τα κέντρα των δίσκων παραμένει ακίνητος.

(μονάδες 8)



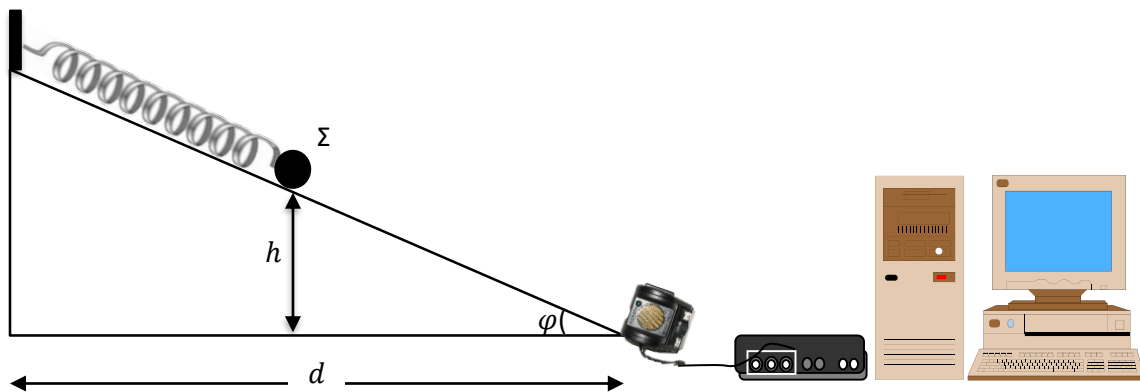
ΘΕΜΑ 4^ο

Στο Σχήμα 1 φαίνεται ένα λείο κεκλιμένο επίπεδο με μήκος βάσης d και γωνιά κλίσης φ . Στο χαμηλότερο άκρο της κεκλιμένης επιφάνειας έχει προσαρμοστεί αισθητήρας κίνησης ενώ στο άλλο άκρο έχει στερεωθεί ένα ελατήριο φυσικού μήκους l_0 και σταθεράς k .



Σχήμα 1

α. Στο ελατήριο στερεώνουμε ένα σώμα Σ μάζας m και το αφήνουμε να ισορροπήσει, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2

i. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ .

(μονάδα 1)

ii. Να εξαγάγετε τη σχέση για το ύψος h της θέσης ισορροπίας σε σχέση με τη μάζα m του σώματος.

(μονάδες 3)



β. Να δείξετε ότι η κίνηση που εκτελεί το σώμα Σ όταν εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του μπορεί να χαρακτηριστεί ως Απλή Αρμονική Ταλάντωση.

(μονάδες 4)

γ. Το σώμα Σ έχει μάζα $m = 0,2 \text{ kg}$ και το ελατήριο σταθερά $k = 20 \text{ N/m}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ το σώμα Σ εκτρέπεται από τη θέση ισορροπίας κατά απόσταση $x = 0,1 \text{ m}$ προς την κατεύθυνση του αισθητήρα και του δίνεται ταχύτητα $u_1 = \sqrt{5} \text{ m/s}$ προς την ίδια κατεύθυνση. Να γράψετε, για την ταλάντωση του σώματος Σ, την εξίσωση της μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας σε σχέση με το χρόνο αντικαθιστώντας σε αυτήν όλους τους σταθερούς όρους.

(μονάδες 4)

δ. Κάθε στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητά του το σώμα Σ χάνει 20 % της μάζας που έχει εκείνη τη στιγμή μέχρι να ελαττωθεί κάτω από το 50 % της αρχικής της τιμής (μέχρι η μάζα του να γίνει μικρότερη του 50 % της αρχικής).

i. Να υπολογίσετε την χρονική στιγμή t_1 στην οποία η μάζα υφίσταται μείωση για πρώτη φορά.

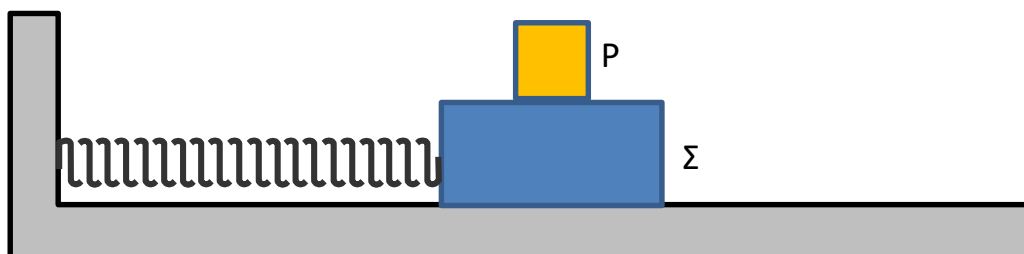
(μονάδες 2)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της μετατόπισης από τη Θέση Ισορροπίας όπως καταγράφεται, με θέση 0 τη θέση του αισθητήρα, από τη χρονική στιγμή t_1 μέχρι τη χρονική στιγμή που η μάζα ελαττώνεται κάτω από το 50 % της αρχικής της τιμής. Το μήκος της βάσης του κεκλιμένου επιπέδου είναι $d = 0,8 \text{ m}$, η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου $\varphi = 60^\circ$ και το φυσικό μήκος του ελατηρίου $l_0 = 0,30 \text{ m}$.

(μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 5^ο

A. Το σώμα Σ έχει μάζα $m_\Sigma = 1,500 \text{ kg}$ και είναι συνδεδεμένο με το ένα άκρο ελατηρίου σταθεράς $k = 90 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι συνδεδεμένο σε ακλόνητο σημείο. Το σώμα Σ βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στο σώμα Σ βρίσκεται σώμα Ρ μάζας $m_P = 0,500 \text{ kg}$. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των σωμάτων Σ και Ρ είναι ίσος με $\mu_s = 0,600$.



Το σύστημα των δύο σωμάτων εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα f και πλάτος x_0 .

α. Να υπολογίσετε τη συχνότητα της ταλάντωσης.

(μονάδες 2)



β. Να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή της δύναμης της τριβής που ασκείται από το σώμα Σ στο σώμα Ρ για τις πιο κάτω τιμές της θέσης των σωμάτων Σ και Ρ:

i. $x = 0$ (θέση ισορροπίας)

(μονάδες 2)

ii. $x = 2,00 \text{ cm}$

(μονάδες 2)

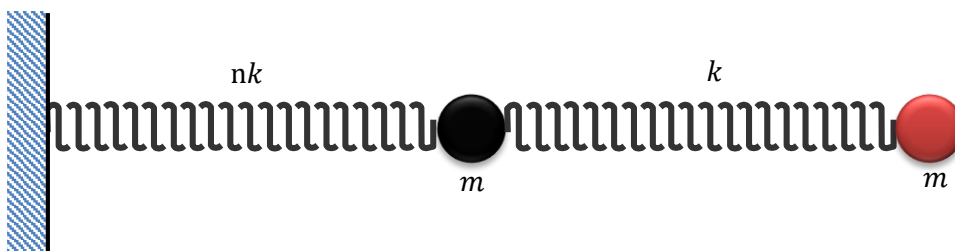
iii. $x = -3,00 \text{ cm}$

(μονάδες 2)

γ. Να υπολογίσετε το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης των δύο σωμάτων, για το οποίο το σώμα Ρ δεν ολισθαίνει πάνω στο σώμα Σ.

(μονάδες 4)

Β. Δύο σώματα με μάζες m είναι συνδεδεμένα με ελατήρια με σταθερές k και nk , όπου n είναι ένας θετικός αριθμός. Τα δύο ελατήρια έχουν το ίδιο φυσικό μήκος.



Θεωρώντας ότι είναι δυνατό να επιλεγούν οι αρχικές συνθήκες κίνησης των δύο σωμάτων με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε τα δύο σώματα να εκτελούν ταλάντωση στο λείο οριζόντιο επίπεδο με το μήκος των δύο ελατηρίων να παραμένει συνεχώς το ίδιο, να υπολογίσετε τον αριθμό n .

(μονάδες 8)

ΤΕΛΟΣ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΕΝΩΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΚΥΠΡΟΥ

33^Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (Α' Φάση)

Κυριακή, 16 Δεκεμβρίου 2018

Ώρα: 10:00 - 13:00



Οδηγίες:

- 1) Το δοκίμιο αποτελείται από επτά (7) σελίδες και πέντε (5) θέματα.
- 2) Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα του δοκιμίου.
- 3) Κάθε θέμα βαθμολογείται με 20 μονάδες. Σε κάθε θέμα οι μονάδες κάθε ερωτήματος φαίνονται στο τέλος του ερωτήματος.
- 4) Στο τετράδιο απαντήσεων να αναγράφεται ξεκάθαρα ο αριθμός του θέματος και του ερωτήματος που απαντάτε.
- 5) Επιτρέπεται η χρήση μόνο μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- 6) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- 7) Επιτρέπεται η χρήση ΜΟΝΟ μπλε μελανιού. (Οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
- 8) Τα σχήματα των θεμάτων δεν είναι υπό κλίμακα.
- 9) Δίνεται: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

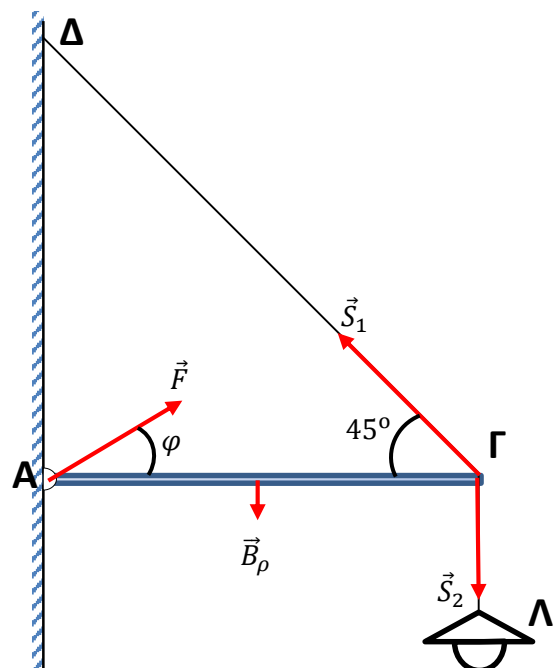
ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Μια ράβδος μήκους $l = 0,500 \text{ m}$ και μάζας $m = 1,60 \text{ kg}$ συγκρατείται οριζόντια με τη βοήθεια άρθρωσης στο σημείο Α και του νήματος ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σημείο Δ απέχει $0,5 \text{ m}$ από το σημείο Α.

Στο άκρο Γ της ράβδου είναι κρεμασμένη με νήμα μια λάμπα Λ μάζας $M = 2,00 \text{ kg}$.

α. Να αντιγράψετε το σχήμα στο τετράδιο απαντήσεων και να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο. Να κατονομάσετε αυτές τις δυνάμεις.

(μονάδες 4)



ΛΥΣΗ

Στη ράβδο ασκούνται τέσσερις δυνάμεις:

- Το βάρος της ράβδου $\vec{B}_\rho$.



- Η τάση του νήματος ΓΔ $\vec{S}_1$.
- Η τάση του νήματος ΓΛ $\vec{S}_2$.
- Η δύναμη που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο στο Α $\vec{F}$.

(Για κάθε ορθό σχεδιασμό και κατονομασία μιας δύναμης – 1 μονάδα.)

β. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο.

(μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

Το βάρος της ράβδου υπολογίζεται από τη σχέση $\vec{B}_\rho = m \cdot \vec{g}$.

$$|\vec{B}_\rho| = 1,60 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 15,7 \text{ N (1 μονάδα)}$$

Η τάση του νήματος ΓΛ $\vec{S}_2$ θα έχει το ίδιο μέτρο με το βάρος της λάμπας, η οποία ισορροπεί.

$$\text{Άρα } |\vec{S}_2| = M \cdot g = 2,00 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 19,6 \text{ N (1 μονάδα)}$$

Για τον υπολογισμό της τάσης του νήματος $\vec{S}_1$ χρησιμοποιούμε την ισορροπία των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο ως προς το σημείο Α:

$$\Sigma \vec{M}_A = 0 \Rightarrow |\vec{S}_1| \eta \mu 45^\circ \cdot l - |\vec{B}_\rho| \cdot \frac{l}{2} - |\vec{S}_2| \cdot l = 0 \Rightarrow |\vec{S}_1| = \frac{|\vec{B}_\rho| + 2|\vec{S}_2|}{2\eta \mu 45^\circ} \text{ (1 μονάδα)}$$

$$\Rightarrow |\vec{S}_1| = 38,8 \text{ N (1 μονάδα)}$$

Για τον υπολογισμό της δύναμης $\vec{F}$ χρησιμοποιούμε την ισορροπία των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο στον οριζόντιο και στον κατακόρυφο άξονα.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow |\vec{F}| \sigma \nu \varphi - |\vec{S}_1| \sigma \nu 45^\circ = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow |\vec{F}| \eta \mu \varphi + |\vec{S}_1| \eta \mu 45^\circ - |\vec{B}_\rho| - |\vec{S}_2| = 0$$

} (1 μονάδα)

Από την επίλυση του πιο πάνω συστήματος εξισώσεων προκύπτει ότι

$$|\vec{F}| = 28,5 \text{ N}, \quad \varphi = 16,0^\circ \text{ (1 μονάδα)}$$

γ. Αν η μέγιστη τάση για την οποία το νήμα ΓΔ δεν κόβεται είναι 32 N, να υπολογίσετε τη μέγιστη απόσταση από το σημείο Α του σημείου της ράβδου, στο οποίο μπορεί να κρεμαστεί η λάμπα.

(μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

Αν το σημείο, στο οποίο μπορεί να κρεμαστεί η λάμπα, απέχει από το σημείο Α απόσταση d , η σχέση για την ισορροπία των ροπών ως προς το Α γράφεται ως:

$$\Sigma \vec{M}_A = 0 \Rightarrow |\vec{S}_1| \eta \mu 45^\circ \cdot l - |\vec{B}_\rho| \cdot \frac{l}{2} - |\vec{S}_2| \cdot d = 0 \text{ (1 μονάδα)}$$

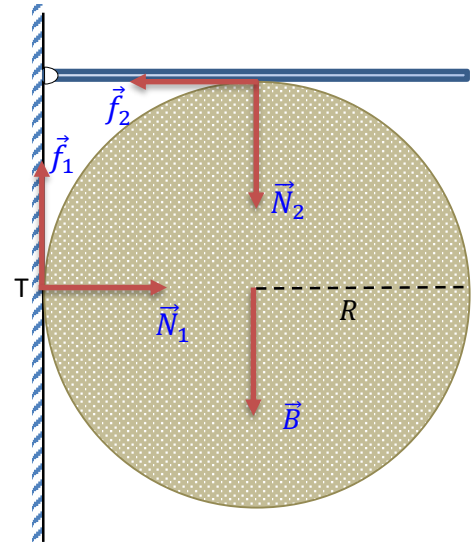
$$\Rightarrow d = \frac{2|\vec{S}_1|\eta\mu 45^\circ - |\vec{B}_\rho|}{2|\vec{S}_2|} \cdot l \text{ (1 μονάδα)}$$

Η απόσταση d γίνεται μέγιστη όταν η τάση $\vec{S}_1$ παίρνει τη μέγιστη τιμή για την οποία το νήμα δεν κόβεται **(1 μονάδα)**. Για $|\vec{S}_1| = 32 \text{ N}$ προκύπτει ότι $d = 0,377 \text{ m}$ **(1 μονάδα)**.

Β. Μια ράβδος μάζας m και μήκους $2R$ έχει το ένα άκρο της στερεωμένο σε άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Η ράβδος αρχικά συγκρατείται οριζόντια από το άλλο της άκρο. Στη συνέχεια τοποθετείται κάτω από τη ράβδο ένας δίσκος μάζας m και ακτίνας R , έτσι ώστε να ακουμπά και στον κατακόρυφο τοίχο και στην οριζόντια ράβδο.

Ο συντελεστής στατικής τριβής του δίσκου με τον τοίχο είναι μ_τ και του δίσκου με τη ράβδο είναι μ_ρ .

Να υπολογίσετε τις ελάχιστες τιμές των συντελεστών τριβής μ_τ και μ_ρ για τις οποίες όταν ο δίσκος και η ράβδος αφεθούν δεν θα πέσουν.



(μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον δίσκο φαίνονται στο σχήμα, το βάρος του δίσκου $\vec{B}$, οι κάθετες δυνάμεις από τον τοίχο και τη ράβδο, $\vec{N}_1$ και $\vec{N}_2$, αντίστοιχα, και οι δυνάμεις της στατικής τριβής με τον τοίχο και τη ράβδο, $\vec{f}_1$ και $\vec{f}_2$, αντίστοιχα.

Από την ισορροπία του δίσκου προκύπτουν οι σχέσεις: **(3 μονάδες)**

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} |\vec{f}_1| - |\vec{B}| - |\vec{N}_2| = 0 & (1) \\ |\vec{N}_1| - |\vec{f}_2| = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Sigma \vec{M}_T = 0 \Rightarrow |\vec{f}_2| - |\vec{B}| - |\vec{N}_2| = 0 \quad (3)$$

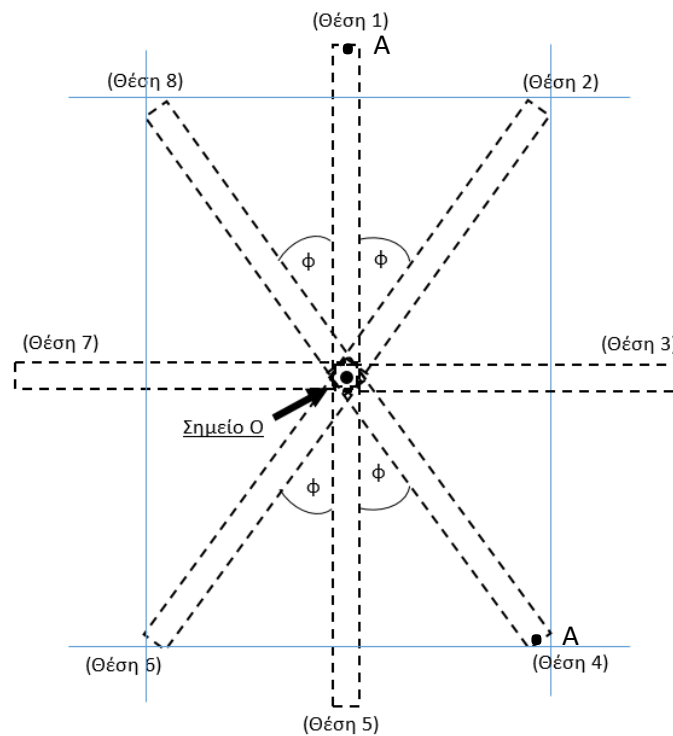
Από τις σχέσεις (1) – (3) προκύπτει ότι $|\vec{f}_1| = |\vec{N}_1|$. Αφού για τη στατική τριβή $\vec{f}_1$ ισχύει $|\vec{f}_1| \leq \mu_\tau \cdot |\vec{N}_1|$ συνεπάγεται ότι $\mu_\tau \geq 1$ **(1 μονάδα)**.

Στη ράβδο ασκούνται οι δυνάμεις του βάρους, της κάθετης αντίδρασης από τον δίσκο, της τριβής από τον δίσκο και της άρθρωσης. Αποδεικνύεται από την ισορροπία των ροπών ως προς το σημείο επαφής της ράβδου με τον δίσκο ότι η δύναμη της άρθρωσης στη ράβδο είναι οριζόντια **(1 μονάδα)**. Από την οριζόντια ισορροπία της ράβδου προκύπτει ότι $|\vec{B}_\rho| = |\vec{N}_2|$. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι $|\vec{B}_\rho| = |\vec{B}|$ από τη σχέση (3) έχουμε $|\vec{f}_2| = 2|\vec{N}_2|$. Αφού για τη στατική τριβή $\vec{f}_2$ ισχύει $|\vec{f}_2| \leq \mu_\rho \cdot |\vec{N}_2|$ συνεπάγεται ότι $\mu_\rho \geq 2$ **(1 μονάδα)**.

ΘΕΜΑ 2^ο

Μια ράβδος μήκους l και μάζας m μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα ο οποίος περνά από το σημείο O , το οποίο βρίσκεται στο άκρο της ράβδου. Η ράβδος αφήνεται από την θέση 1 και ακολουθεί την εξής πορεία:

θέση 1 $\rightarrow$ θέση 2 $\rightarrow$ θέση 3 $\rightarrow$ θέση 4 $\rightarrow$ θέση 5 $\rightarrow$ θέση 6 $\rightarrow$ θέση 7 $\rightarrow$ θέση 8 $\rightarrow$ θέση 1.



α. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σημείου A της ράβδου, στη θέση 4.

(μονάδες 3)

ΛΥΣΗ

Η κινητική ενέργεια της ράβδου στη θέση 4 θα είναι ίση με τη δυναμική ενέργεια της ράβδου στη θέση 1. Επιλέγοντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο μάζας της ράβδου στη θέση 4 θα έχουμε:

$$\frac{1}{2} I \omega_A^2 = mg \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2} \sin \phi \right) \quad (1 \text{ μονάδα})$$

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που διέρχεται από το άκρο της είναι $I = \frac{1}{3} ml^2$. Άρα από την προηγούμενη σχέση προκύπτει για τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου στη θέση 4

$$\omega_A = \sqrt{\frac{3g}{l} (1 + \sin \phi)} \quad (1 \text{ μονάδα})$$

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του άκρου της ράβδου στη θέση 4 θα είναι ίσο με



$$|\vec{v}_A| = \omega_A \cdot l = \sqrt{3gl(1 + \sin\phi)} \quad (1 \text{ μονάδα})$$

β. Να γράψετε σε ποια/ποιες από τις θέσεις 1 – 8, η ράβδος έχει:

i. τη μέγιστη συνισταμένη ροπή. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(μονάδες 3)

ΛΥΣΗ

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι το βάρος $\vec{B}$ (στο Κ.Μ.) και μια δύναμη $\vec{F}$ από τον άξονα. Η ροπή της δύναμης από τον άξονα είναι μηδενική (επειδή $d = 0$) οπότε η συνισταμένη ροπή είναι ίση με την ροπή του βάρους $\vec{B}$. (1 μονάδα)

Η ροπή είναι μέγεθος διανυσματικό. Το μέτρο της ροπής του βάρους είναι μέγιστο στις θέσεις 3 και 7 (αφού $d = \ell/2 = d_{max}$), όμως η ροπή του βάρους στη θέση 1 είναι δεξιόστροφη άρα η αλγεβρική της τιμή είναι αρνητική, ενώ στην θέση 7 η ροπή του βάρους είναι αριστερόστροφη άρα η αλγεβρική της τιμή είναι θετική. (1 μονάδα)

Άρα η συνισταμένη ροπή έχει μέγιστη τιμή στη θέση 7. (1 μονάδα)

ii. τη μέγιστη γωνιακή επιτάχυνση. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(μονάδες 2)

ΛΥΣΗ

Η γωνιακή επιτάχυνση συνδέεται με τη συνισταμένη ροπή στη ράβδο και τη ροπή αδράνειας της ράβδου (η οποία είναι σταθερή) μέσω της σχέσης $\vec{\alpha}_{γων} = \frac{\Sigma \vec{M}_{εξ}}{I}$ (2^{ος} νόμος Νεύτωνα) (1 μονάδα). Άρα η γωνιακή επιτάχυνση έχει μέγιστη τιμή στη θέση 7. (1 μονάδα)

iii. τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(μονάδες 2)

ΛΥΣΗ

Η γωνιακή ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος. Η ράβδος περιστρέφεται δεξιόστροφα άρα η αλγεβρική τιμή της ράβδου είναι αρνητική σε όλη τη διάρκεια της κίνησης και στη θέση 1 έχει μηδενική τιμή. (1 μονάδα). Άρα η γωνιακή ταχύτητα έχει μέγιστη αλγεβρική τιμή στην θέση 1 (1 μονάδα).

iv. τη μέγιστη κινητική ενέργεια. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(μονάδες 2)

ΛΥΣΗ

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι το βάρος $\vec{B}$ (στο Κ.Μ.) και μια δύναμη $\vec{F}$ από τον άξονα. Το έργο της δύναμης του άξονα είναι μηδενικό (δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της) οπότε ισχύει $\Sigma W = W_B$, άρα ισχύει το ΘΔΜΕ, οπότε στη θέση εκείνη όπου



το κέντρο μάζας της ράβδου έχει το μικρότερο ύψος, σε αυτή την θέση θα έχει τη μικρότερη βαρυτική δυναμική ενέργεια, άρα θα έχει τη μέγιστη κινητική ενέργεια (**1 μονάδα**). Άρα η ράβδος έχει τη μέγιστη κινητική ενέργεια στη θέση 5 (**1 μονάδα**).

γ. Να κατατάξετε σε φθίνουσα σειρά, για τις θέσεις 1-8:

i. τα μέτρα της συνισταμένης ροπής στη ράβδο. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι το βάρος $\vec{B}$ (στο Κ.Μ.) και μια δύναμη $\vec{F}$ από τον άξονα. Η ροπή της δύναμης από τον άξονα είναι μηδενική (επειδή $d=0$) οπότε η συνισταμένη ροπή είναι ίση με την ροπή του βάρους $\vec{B}$ (όπως έχουμε ήδη αναφέρει). Το μέτρο της ροπής του βάρους δίνεται από την σχέση $|\vec{M}_B| = |\vec{B}| \cdot |\vec{r}| \cdot \eta\mu\varphi = |\vec{B}| \cdot d$, όπου d η απόσταση του φορέα του βάρους από τον άξονα περιστροφής.

Οι θέσεις 2,4, 6 και 8 έχουν το ίδιο $d = \frac{l}{2} \cdot \eta\mu\varphi$, άρα και τα ίδια μέτρα ροπών (**1 μονάδα**), οι θέσεις 1 και 5 έχουν το ίδιο $d = 0$, άρα και τα ίδια μέτρα ροπών (μηδενική ροπή) (**1 μονάδα**). Οι θέσεις 3 και 7 έχουν το ίδιο $d = \frac{l}{2} \eta\mu 90^\circ = d_{max}$, άρα και τα ίδια μέτρα ροπών (μέγιστη ροπή) (**1 μονάδα**).

Άρα η κατάταξη είναι:

$$|\Sigma \vec{M}_{\theta,3}| = |\Sigma \vec{M}_{\theta,7}| > |\Sigma \vec{M}_{\theta,2}| = |\Sigma \vec{M}_{\theta,4}| = |\Sigma \vec{M}_{\theta,6}| = |\Sigma \vec{M}_{\theta,8}| > |\Sigma \vec{M}_{\theta,1}| = |\Sigma \vec{M}_{\theta,5}| (= 0) \quad (\mathbf{1 \text{ μονάδα}}).$$

ii. τα μέτρα των γωνιακών ταχυτήτων της ράβδου. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι το βάρος $\vec{B}$ (στο Κ.Μ.) και μια δύναμη $\vec{F}$ από τον άξονα. Το έργο της δύναμης του άξονα είναι μηδενικό (δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της) οπότε ισχύει $\Sigma W = W_B$, άρα ισχύει το ΘΔΜΕ (όπως έχουμε ήδη αναφέρει).

Στη θέση 1 η ράβδος είναι ακίνητη, άρα $|\vec{\omega}_1| = 0$.

Στις θέσεις 2 και 8 το Κ.Μ. της ράβδου είναι στο ίδιο ύψος $h_2 = h_8$, άρα η ράβδος έχει την ίδια βαρυτική δυναμική ενέργεια άρα και την ίδια κινητική ενέργεια, άρα και το ίδιο μέτρο γωνιακής ταχύτητας (**1 μονάδα**).

Το ίδιο ισχύει για τις θέσεις 3 και 7 και για τις θέσεις 4 και 6 (**1 μονάδα**).

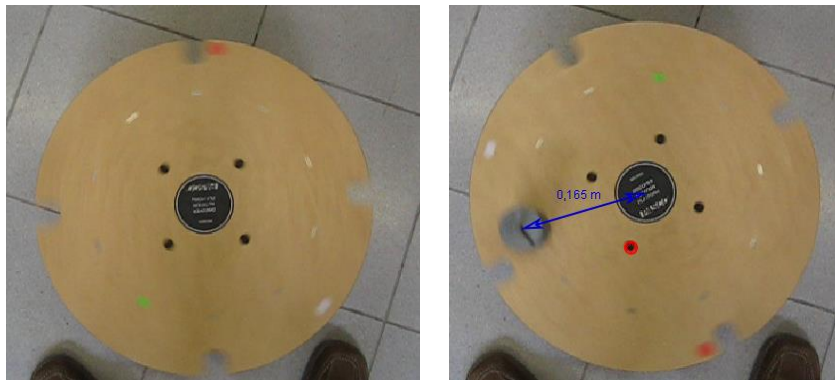
Επίσης, ισχύει ότι $h_1 > h_2 = h_8 > h_3 = h_7 > h_4 = h_6 > h_5$ οπότε και η βαρυτική δυναμική ενέργεια της ράβδου θα έχει αυτή τη σειρά κατάταξης και λόγω της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας η κινητική ενέργεια θα έχει την αντίστροφη σειρά κατάταξης (**1 μονάδα**).

Και επειδή η $E_{\text{κιν, περ}} \sim \omega^2$, θα ισχύει:

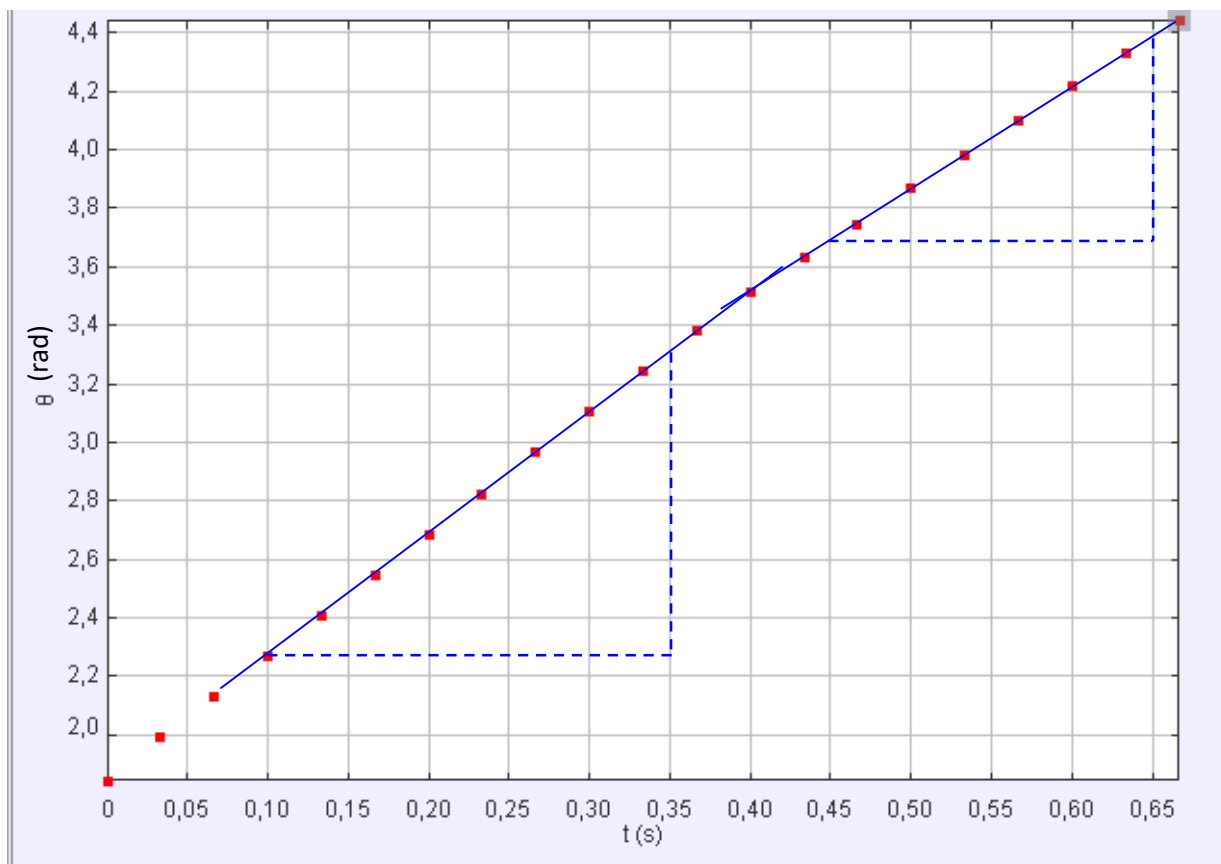
$$|\vec{\omega}_{\theta,5}| > |\vec{\omega}_{\theta,4}| = |\vec{\omega}_{\theta,6}| > |\vec{\omega}_{\theta,3}| = |\vec{\omega}_{\theta,7}| > |\vec{\omega}_{\theta,8}| = |\vec{\omega}_{\theta,2}| > |\vec{\omega}_{\theta,1}| (= 0) \quad (\mathbf{1 \text{ μονάδα}})$$

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Μια ομάδα μαθητών πραγματοποίησε ένα πείραμα με στόχο να υπολογίσει τη ροπή αδράνειας μιας περιστρεφόμενης πλατφόρμας. Για το σκοπό αυτό έθεσε την πλατφόρμα σε περιστροφή και σε κάποια στιγμή ένα μέλος της ομάδας άφησε από μικρό ύψος να πέσει στην πλατφόρμα μια δέσμη σταθμών συνολικής μάζας 1 kg. Η δέσμη πέφτει σε απόσταση 16,5 cm από το κέντρο της πλατφόρμας. Στις πιο κάτω εικόνες φαίνεται η πλατφόρμα πριν και μετά την πτώση των σταθμών.



Η ομάδα κατέγραψε σε γραφική παράσταση τη γωνία περιστροφής θ (σε rad) της πλατφόρμας σε συνάρτηση με τον χρόνο. Η γραφική παράσταση που προέκυψε φαίνεται πιο κάτω.



α. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της πλατφόρμας.

(μονάδες 6)



ΛΥΣΗ

Για το σύστημα πλατφόρμα – σταθμά θα ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής της πλατφόρμας (**1 μονάδα**).

Η στροφορμή του συστήματος πριν την πτώση των σταθμών είναι ίση με

$$L_{\pi\rho\nu} = I_{\pi\lambda} \cdot \omega_{\pi\rho\nu} + I_{\sigma\tau} \cdot \omega_{\sigma\tau} = I_{\pi\lambda} \cdot \omega_{\pi\rho\nu} \text{ (**1 μονάδα**)}$$

Μετά την πτώση των σταθμών η στροφορμή του συστήματος είναι ίση με

$$L_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} = (I_{\pi\lambda} + I_{\sigma\tau}) \cdot \omega_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} \text{ (**1 μονάδα**)}$$

Αφού $L_{\pi\rho\nu} = L_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}}$ θα πάρουμε για τη ροπή αδράνειας της πλατφόρμας την πιο κάτω σχέση:

$$I_{\pi\lambda} = \frac{\omega_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}}}{\omega_{\pi\rho\nu} - \omega_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}}} \cdot I_{\sigma\tau} = \frac{\omega_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}}}{\omega_{\pi\rho\nu} - \omega_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}}} \cdot mr^2 \text{ (**1 μονάδα**)}$$

Όπου m είναι η μάζα των σταθμών και r η απόσταση των σταθμών από τον άξονα περιστροφής.

Από τη γραφική παράσταση υπολογίζουμε τις γωνιακές ταχύτητες $\omega_{\pi\rho\nu}$ και $\omega_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}}$.

$$\omega_{\pi\rho\nu} = \frac{3,30 - 2,27}{0,35 - 0,10} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 4,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{4,38 - 3,68}{0,65 - 0,45} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 3,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ (**1 μονάδα**)}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση για τη ροπή αδράνειας της πλατφόρμας τις τιμές των μεγεθών θα έχουμε

$$I_{\pi\lambda} = \frac{3,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{4,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} - 3,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \cdot 1 \text{ kg} \cdot 0,165^2 \text{ m}^2 = 0,16 \text{ kgm}^2 \text{ (**1 μονάδα**)}$$

β. Να εξηγήσετε γιατί ελαττώνεται η γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας.

(μονάδες 2)

ΛΥΣΗ

Η γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας ελαττώνεται λόγω της ροπής της δύναμης της τριβής που ασκούν τα σταθμά στην πλατφόρμα αμέσως μετά την πτώση τους σε αυτήν (**1 μονάδα**) και μέχρι τα σταθμά να αποκτήσουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα με την πλατφόρμα (**1 μονάδα**).

γ. Να υπολογίσετε τον λόγο της τελικής περιστροφικής κινητικής ενέργειας του συστήματος δίσκος – σταθμά ως προς την αρχική περιστροφική κινητική ενέργεια. Να εξηγήσετε που οφείλεται η διαφορά μεταξύ τους.

(μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

Η κινητική ενέργεια πριν την πτώση των σταθμών είναι ίση με

$$E_{αρχ} = \frac{1}{2} I_{πλ} \cdot \omega_{πριν}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,16 \text{ kgm}^2 \cdot 4,1^2 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 1,3 \text{ J (1 μονάδα)}$$

Η τελική κινητική ενέργεια είναι ίση με

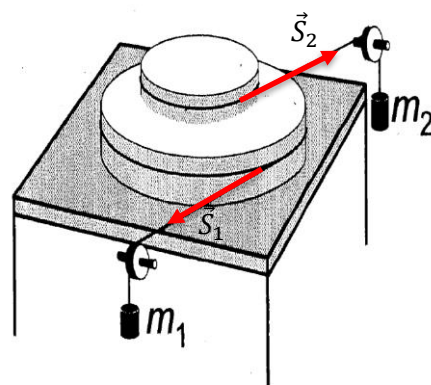
$$E_{τελ} = \frac{1}{2} (I_{πλ} + I_{στ}) \cdot \omega_{μετά}^2 = \frac{1}{2} \cdot (0,16 \text{ kgm}^2 + 1 \text{ kg} \cdot 0,165^2 \text{ m}^2) \cdot 3,5^2 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 1,1 \text{ J (1 μονάδα)}$$

Άρα ο λόγος της τελικής κινητικής ενέργειας ως προς την αρχική κινητική ενέργεια των σταθμών είναι

$$\frac{E_{τελ}}{E_{αρχ}} = \frac{1,1 \text{ J}}{1,3 \text{ J}} = 0,85 \text{ (1 μονάδα)}$$

Η απώλεια οφείλεται στις τριβές που αναπτύσσονται μεταξύ πλατφόρμας και σταθμών μέχρι τα σταθμά να αποκτήσουν τη γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας (1 μονάδα).

Β. Δύο δίσκοι με ακτίνες $R_1 = 0,3 \text{ m}$ και $R_2 = 0,2 \text{ m}$ έχουν στερεωθεί μεταξύ τους με τέτοιο τρόπο ώστε τα κέντρα τους να είναι το ένα πάνω από το άλλο. Η ροπή αδράνειας του συστήματος των δύο δίσκων είναι ίση με $I = 0,25 \text{ kgm}^2$. Ο μεγαλύτερος δίσκος ακουμπά σε λείο οριζόντιο τραπέζι. Νήματα αμελητέας μάζας είναι τυλιγμένα γύρω από τους δύο δίσκους και είναι συνδεδεμένα μέσω τροχαλιών αμελητέας μάζας με δύο σώματα με μάζες $m_1 = 5 \text{ kg}$ και m_2 , όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα νήματα δεν ολισθαίνουν στους δίσκους. Να υπολογίσετε την τιμή της άγνωστης μάζας m_2 , για την οποία ο άξονας που διέρχεται από τα κέντρα των δίσκων παραμένει ακίνητος.



(μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

Η ισορροπία του άξονα των δίσκων σημαίνει ότι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα των δύο δίσκων είναι ίση με μηδέν. Άρα οι τάσεις των δύο νημάτων $\vec{S}_1$ και $\vec{S}_2$ θα πρέπει να είναι αντίθετες, αφού είναι οι μόνες δυνάμεις στο οριζόντιο επίπεδο. Άρα τα μέτρα αυτών των δυνάμεων είναι ίσα: $|\vec{S}_1| = |\vec{S}_2| = S$ (1 μονάδα).

Οι ροπές των δύο δυνάμεων είναι διαφορετικές, αφού οι φορείς τους απέχουν διαφορετική απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει συνισταμένη ροπή διαφορετική από το μηδέν, με αποτέλεσμα οι δίσκοι να περιστρέφονται δεξιόστροφα, όπως φαίνονται από πάνω, με μια γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}$ (1 μονάδα).

Άρα το σώμα με μάζα m_1 θα κατέρχεται με επιτάχυνση $|\vec{a}_1| = |\vec{a}| \cdot r_1$ και το σώμα με μάζα m_2 θα ανέρχεται με επιτάχυνση $|\vec{a}_2| = |\vec{a}| \cdot r_2$ (1 μονάδα).

Εφαρμόζοντας τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα για την κίνηση των δύο σωμάτων έχουμε

$$\left. \begin{aligned} m_1 g - S &= m_1 |\vec{a}_1| \Rightarrow m_1 g - S = m_1 |\vec{a}| r_1 & (1) \\ S - m_2 g &= m_2 |\vec{a}_2| \Rightarrow S - m_2 g = m_2 |\vec{a}| r_2 & (2) \end{aligned} \right\} \text{ (1 μονάδα)}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$m_2 = \frac{m_1 g - m_1 r_1 |\vec{a}|}{g + r_2 |\vec{a}|} \quad (3) \text{ (1 μονάδα)}$$

Για τον υπολογισμό της μάζας m_2 χρειάζεται να υπολογισθεί η γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}$. Από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση έχουμε

$$S(r_1 - r_2) = I \cdot |\vec{a}| \quad (4) \text{ (1 μονάδα)}$$

Αντικαθιστώντας την τάση S από την (1) στην (4) παίρνουμε για τη γωνιακή ταχύτητα τη σχέση

$$|\vec{a}| = \frac{m_1 g (r_1 - r_2)}{I + m_1 r_1 (r_1 - r_2)} \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας την (5) στην (3) παίρνουμε την τελική σχέση για τη μάζα m_2 .

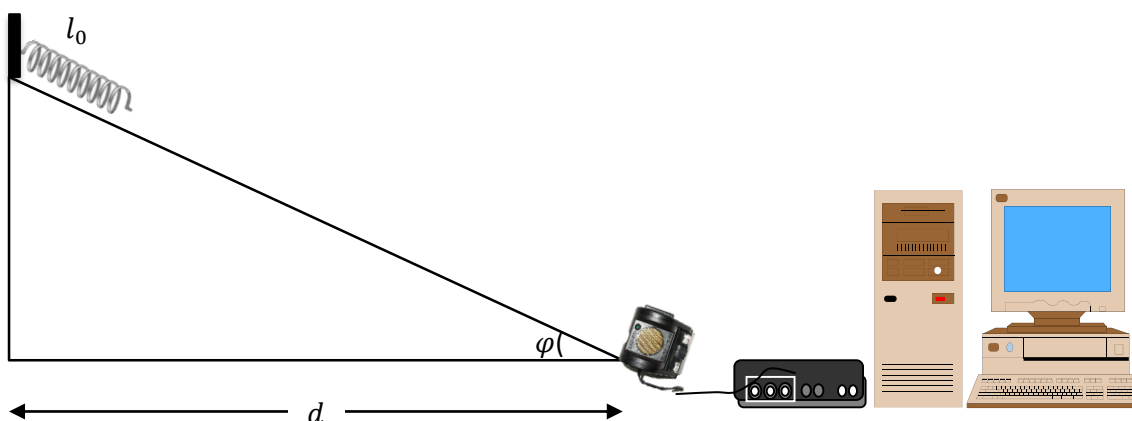
$$m_2 = \frac{I}{I + m_1 (r_1^2 - r_2^2)} m_1 \quad (6) \text{ (1 μονάδα)}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των μεγεθών στην (6) υπολογίζουμε την τιμή της μάζας m_2 .

$$m_2 = \frac{0,25 \text{ kgm}^2}{0,25 \text{ kgm}^2 + 5 \text{ kg}(0,3^2 \text{ m}^2 - 0,2^2 \text{ m}^2)} 5 \text{ kg} = 2,5 \text{ kg} \text{ (1 μονάδα)}$$

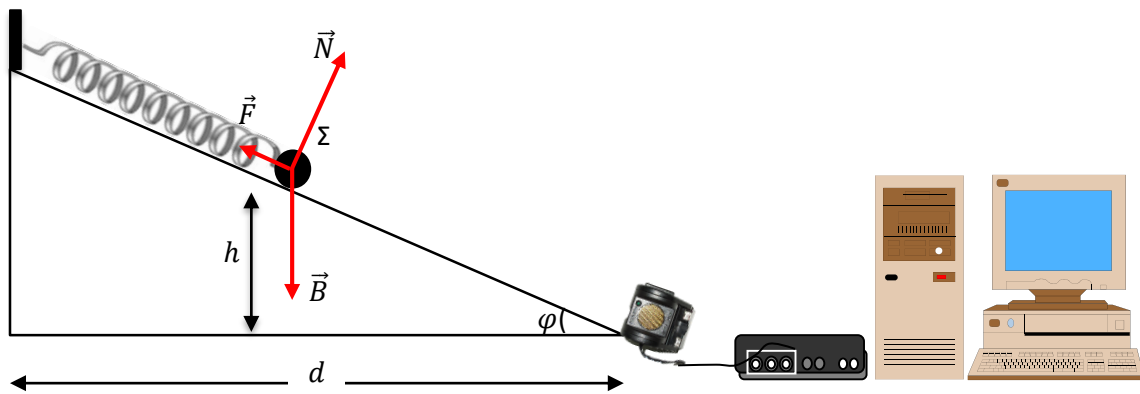
ΘΕΜΑ 4^ο

Στο Σχήμα 1 φαίνεται ένα λείο κεκλιμένο επίπεδο με μήκος βάσης d και γωνιά κλίσης φ . Στο χαμηλότερο άκρο της κεκλιμένης επιφάνειας έχει προσαρμοστεί αισθητήρας κίνησης ενώ στο άλλο άκρο έχει στερεωθεί ένα ελατήριο φυσικού μήκους l_0 και σταθεράς k .



Σχήμα 1

- α. Στο ελατήριο στερεώνουμε ένα σώμα Σ μάζας m και το αφήνουμε να ισορροπήσει, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2

- i. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ.

(μονάδα 1)

ΛΥΣΗ

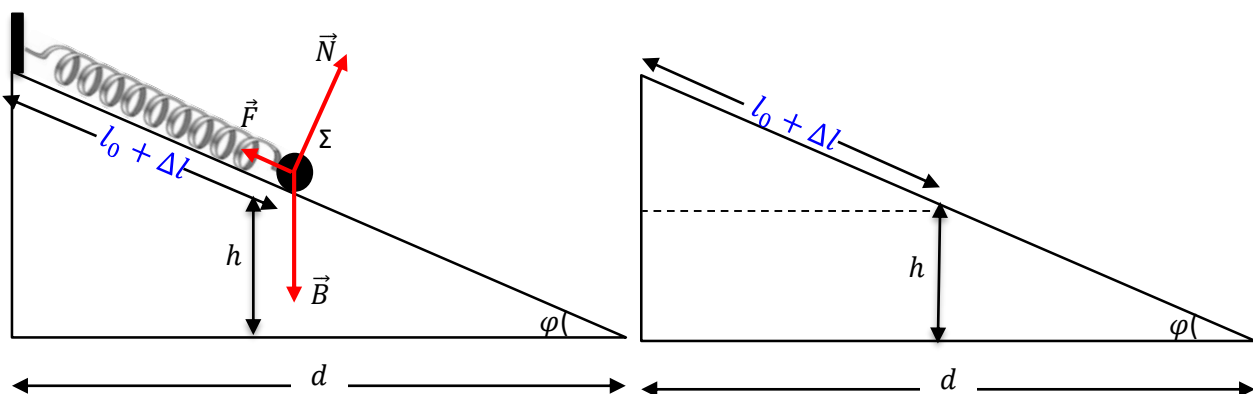
Στο σώμα ασκούνται τρεις δυνάμεις: το βάρος $\vec{B}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ και η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}$ (1 μονάδα).

- ii. Να εξαγάγετε τη σχέση για το ύψος h της θέσης ισορροπίας σε σχέση με τη μάζα m του σώματος.

(μονάδες 3)

ΛΥΣΗ

Η απόσταση του σώματος από το σημείο στήριξης του ελατηρίου στη θέση που ισορροπεί το σώμα είναι $l_0 + \Delta l$, όπου Δl είναι η επιμήκυνση του ελατηρίου εξαιτίας της παράλληλης με το κεκλιμένο επίπεδο συνιστώσας του βάρους.



Η επιμήκυνση του ελατηρίου δίνεται από τη σχέση

$$\Delta l = \frac{mg \sin \varphi}{k} \quad (1 \text{ μονάδα})$$

Άρα το ύψος στο οποίο το σώμα ισορροπεί θα είναι ίσο με



$$h = d\epsilon\phi\phi - (l_0 + \Delta l)\eta\mu\phi \quad (1 \text{ μονάδα}) \Rightarrow h = d\epsilon\phi\phi - \left(l_0 + \frac{mg\eta\mu\phi}{k}\right)\eta\mu\phi \quad (1 \text{ μονάδα})$$

β. Να δείξετε ότι η κίνηση που εκτελεί το σώμα Σ όταν εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του μπορεί να χαρακτηριστεί ως Απλή Αρμονική Ταλάντωση.

(μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

$$\Sigma \vec{F} = \vec{B} + \vec{F}_{\epsilon\lambda} + \vec{N}$$

$$\Sigma \vec{F} = \vec{B}_x + \cancel{\vec{B}_y} + \vec{F}_{\epsilon\lambda} + \cancel{\vec{N}} \quad (1 \text{ μονάδα})$$

$$\Sigma F = -mg\eta\mu\phi - k(x - x_{\phi M})$$

$$\Sigma F = -mg\eta\mu\phi - k(x - \Delta l) = -kx \quad (1 \text{ μονάδα})$$

→ Απλή Αρμονική Ταλάντωση (1 μονάδα)

γ. Το σώμα Σ έχει μάζα $m = 0,2 \text{ kg}$ και το ελατήριο σταθερά $k = 20 \text{ N/m}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ το σώμα Σ εκτρέπεται από τη θέση ισορροπίας κατά απόσταση $x = 0,1 \text{ m}$ προς την κατεύθυνση του αισθητήρα και του δίνεται ταχύτητα $u_1 = \sqrt{5} \text{ m/s}$ προς την ίδια κατεύθυνση. Να γράψετε, για την ταλάντωση του σώματος Σ, την εξίσωση της μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας σε σχέση με το χρόνο αντικαθιστώντας σε αυτήν όλους τους σταθερούς όρους.

(μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20 \text{ N/m}}{0,2 \text{ kg}}} = 10 \text{ rad/s} \quad (1 \text{ μονάδα})$$

$$u^2 = \omega^2(x_0^2 - x^2) \Rightarrow 5 = 100(x_0^2 - 0,01) \Rightarrow 5 = 100x_0^2 - 1$$

$$\Rightarrow x_0 = \sqrt{0,06} \Rightarrow x_0 = 0,25 \text{ m} \quad (1 \text{ μονάδα})$$

$$x = x_0\eta\mu(\omega t + \theta_0) \stackrel{t=0}{\Rightarrow} -0,1 = 0,25\eta\mu\theta_0 \Rightarrow \eta\mu\theta_0 = \frac{-0,1}{0,25} \Rightarrow \eta\mu\theta_0 = \eta\mu 3,55$$

$$\Rightarrow \theta_0 = 3,55 \text{ rad} \quad (1 \text{ μονάδα})$$

$$y = y_0\eta\mu(\omega t + \theta_0) \Rightarrow y = 0,25 \text{ m} \eta\mu\left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t + 3,55 \text{ rad}\right) \quad (1 \text{ μονάδα})$$

(δεκτή και η λύση με θετική φορά προς τον αισθητήρα και αρχική φάση $0,41 \text{ rad}$)

δ. Κάθε στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητά του το σώμα Σ χάνει 20 % της μάζας που έχει εκείνη τη στιγμή μέχρι να ελαττωθεί κάτω από το 50 % της αρχικής της τιμής (μέχρι η μάζα του να γίνει μικρότερη του 50 % της αρχικής).



- i. Να υπολογίσετε την χρονική στιγμή t_1 στην οποία η μάζα υφίσταται μείωση για πρώτη φορά.

(μονάδες 2)

ΛΥΣΗ

$$x = 0,25 \text{ m} \eta \mu \left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t + 3,55 \text{ rad} \right) \Rightarrow -0,25 = 0,25 \text{ m} \eta \mu \left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t + 3,55 \text{ rad} \right) \quad (1 \text{ μονάδα})$$

$$\Rightarrow \eta \mu 4,71 \text{ rad} = \eta \mu \left(10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t + 3,55 \text{ rad} \right) \Rightarrow t = 0,116 \text{ s} \quad (1 \text{ μονάδα})$$

- ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της μετατόπισης από τη θέση Ισορροπίας όπως καταγράφεται, με θέση 0 τη θέση του αισθητήρα, από τη χρονική στιγμή t_1 μέχρι τη χρονική στιγμή που η μάζα ελαττώνεται κάτω από το 50 % της αρχικής της τιμής. Το μήκος της βάσης του κεκλιμένου επιπέδου είναι $d = 0,8 \text{ m}$, η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου $\varphi = 60^\circ$ και το φυσικό μήκος του ελατηρίου $l_0 = 0,30 \text{ m}$.

(μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

Ο ταλαντωτής ξεκινά την κίνηση του τη χρονική στιγμή $t = 0$ από τη θέση $x_t = -0,1 \text{ m}$ (από τη θέση ισορροπίας), και την οποία ο αισθητήρας καταγράφει ως $x = 1,115 \text{ m}$, και κινείται προς την αρνητική ακραία θέση της ταλάντωσης του $x_t = -0,25 \text{ m}$ (από τη θέση ισορροπίας), την οποία καταγράφει ως $x = 0,965 \text{ m}$ στην οποία φτάνει με βάση την απάντηση του προηγούμενου ερωτήματος τη χρονική στιγμή $t = 0,116 \text{ s}$.

$$\text{Αρχική θέση ισορροπίας: } \Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{B} + \vec{N} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda} = 0$$

$$\vec{B}_x + \vec{B}_y + \vec{F}_{\varepsilon\lambda} + \vec{N} = 0 \Rightarrow mg \eta \mu \theta - k \Delta l = 0$$

$$\Delta l = \frac{mg \eta \mu \theta}{k} \Rightarrow \Delta l = 0,085 \text{ m}$$

$$x_{\theta,l} = \frac{d}{\sin \theta} - l_0 - \Delta l = 1,600 \text{ m} - 0,300 \text{ m} - 0,085 \text{ m} = 1,215 \text{ m}$$

$$x_{0,116} = x_{\theta,l} - x_0 = 1,215 \text{ m} - 0,25 \text{ m} = 0,965 \text{ m}$$

Στη θέση αυτή ο ταλαντωτής αποβάλλει το 20% της μάζας του οπότε $m' = 0,8m_0 = 0,1600 \text{ kg}$ και ξεκινά η καταγραφή της γραφικής παράστασης.

$$\text{Η νέα ταλάντωση θα έχει } \omega' = \sqrt{\frac{k}{m'}} = \sqrt{\frac{20}{0,16}} = 11,18 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ και περίοδο } T' = 0,562 \text{ s.}$$

Σε χρονικό διάστημα $\Delta t = T/2 = 0,281 \text{ s}$ θα φτάσει στην άλλη ακραία θέση της ταλάντωσης του όπου θα αποβάλλει 20% της εναπομείνουσας μάζας.

Η θέση ισορροπίας για το χρονικό διάστημα αυτό είναι:

$$\Delta l' = \frac{m' g \eta \mu \theta}{k} \Rightarrow \Delta l' = 0,0680 \text{ m}$$

$$x_{\theta,l} = \frac{d}{\sin \theta} - l_0 - \Delta l' = 1,600 \text{ m} - 0,300 \text{ m} - 0,0680 \text{ m} = 1,232 \text{ m}$$



Το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελεί στο χρονικό διάστημα αυτό θα είναι

$$x'_0 = x_0 + (\Delta l - \Delta l') = 0,250 \text{ m} + 0,085 \text{ m} - 0,0680 \text{ m} = 0,267 \text{ m}.$$

Σε χρονικό διάστημα $\Delta t = T/2 = 0,281 \text{ s}$ θα φτάσει στην άλλη ακραία θέση της ταλάντωσης του όπου θα αποβάλει 20% της εναπομείνουσας μάζας.

Μετά τη χρονική στιγμή $t = 0,397 \text{ s}$ όπου ο ταλαντωτής αποβάλλει 20% της εναπομείνουσας μάζας του η νέα τιμή της μάζας του θα είναι $m'' = 0,80 m'$

$$m'' = 0,80 \cdot 0,1600 \text{ kg} = 0,1280 \text{ kg}.$$

$$\text{Η νέα ταλάντωση θα έχει } \omega'' = \sqrt{\frac{k}{m''}} = \sqrt{\frac{20}{0,128}} = 12,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ και περίοδο } T'' = 0,503 \text{ s}.$$

Η θέση ισορροπίας για το χρονικό διάστημα αυτό είναι:

$$\Delta l' = \frac{m' g \eta \mu \theta}{k} \Rightarrow \Delta l' = 0,0544 \text{ m}$$

$$x_{\theta, l} = \frac{d}{\sin \theta} - l_0 - \Delta l' = 1,600 \text{ m} - 0,300 \text{ m} - 0,0544 \text{ m} = 1,246 \text{ m}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελεί στο χρονικό διάστημα αυτό θα είναι

$$x''_0 = x'_0 - (\Delta l' - \Delta l'') = 0,267 \text{ m} - (0,0680 \text{ m} - 0,0544 \text{ m}) = 0,253 \text{ m}.$$

Σε χρονικό διάστημα $\Delta t = T/2 = 0,255 \text{ s}$ θα φτάσει στην άλλη ακραία θέση της ταλάντωσης του όπου θα αποβάλει 20% της εναπομείνουσας μάζας.

Μετά τη χρονική στιγμή $t = 0,652 \text{ s}$ όπου ο ταλαντωτής αποβάλλει 20% της εναπομείνουσας μάζας του η νέα τιμή της μάζας του θα είναι $m''' = 0,80 m''$

$$m''' = 0,80 \cdot 0,1280 \text{ kg} = 0,1024 \text{ kg}.$$

$$\text{Η νέα ταλάντωση θα έχει } \omega''' = \sqrt{\frac{k}{m'''}} = \sqrt{\frac{20}{0,1024}} = 13,97 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ και περίοδο } T''' = 0,449 \text{ s}.$$

Η θέση ισορροπίας για το χρονικό διάστημα αυτό είναι:

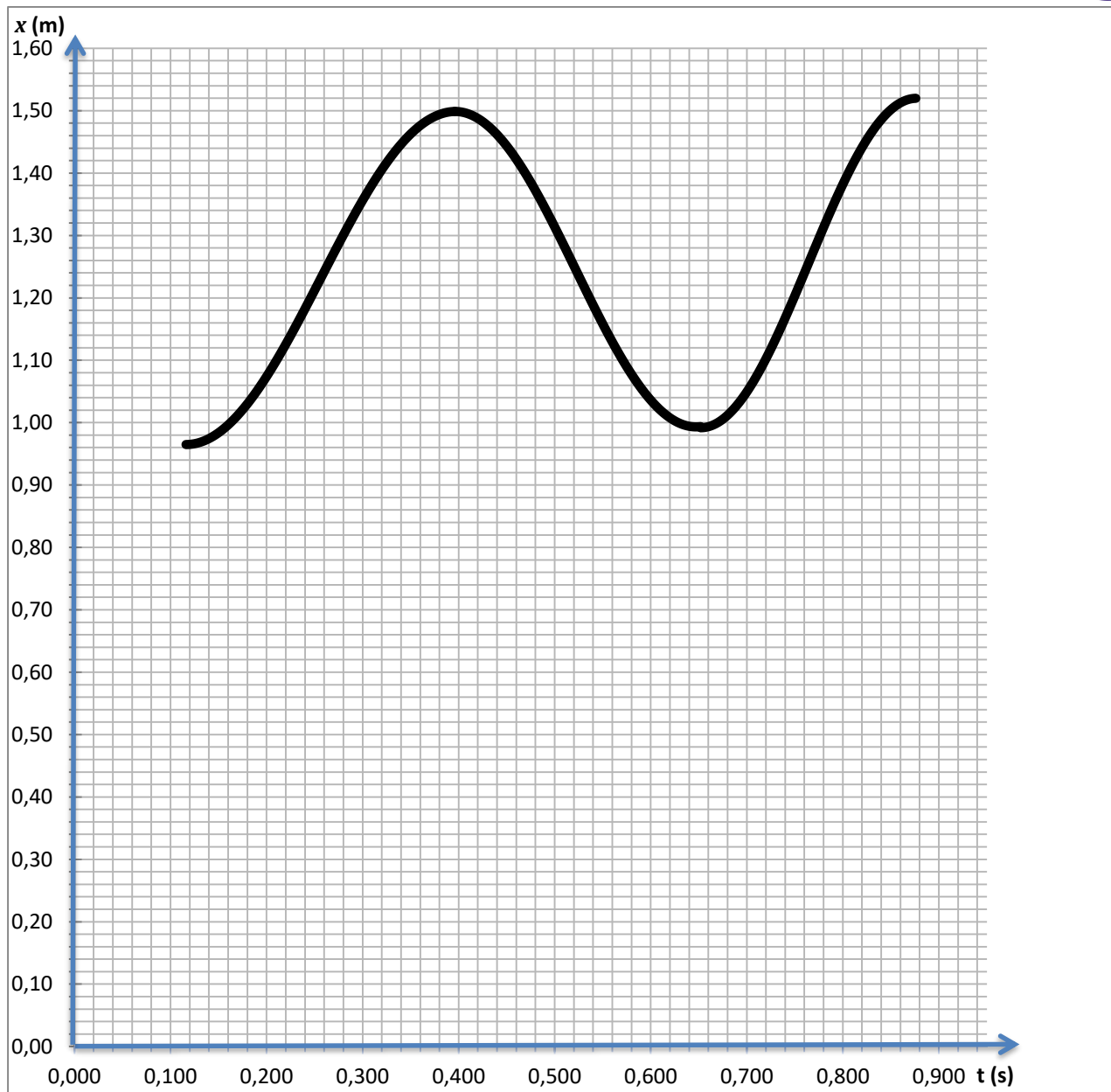
$$\Delta l'' = \frac{m'' g \eta \mu \theta}{k} \Rightarrow \Delta l'' = 0,0430 \text{ m}$$

$$x_{\theta, l} = \frac{d}{\sin \theta} - l_0 - \Delta l'' = 1,600 \text{ m} - 0,300 \text{ m} - 0,0430 \text{ m} = 1,256 \text{ m}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελεί στο χρονικό διάστημα αυτό θα είναι

$$x'''_0 = x''_0 - (\Delta l'' - \Delta l''') = 0,253 \text{ m} + 0,0544 \text{ m} - 0,0430 \text{ m} = 0,264 \text{ m}.$$

Σε χρονικό διάστημα $\Delta t = T/2 = 0,224 \text{ s}$ θα φτάσει στην άλλη ακραία θέση της ταλάντωσης του όπου θα αποβάλει 20% της εναπομείνουσας μάζας και θα πέσει κάτω από 50% της αρχικής τιμής.



1 μονάδα για ορθά βαθμονομημένους άξονες.

1 μονάδα για κάθε ένα από τα σημεία (0,116, 0,965), (0,397, 1,499), (0,652, 0,992), (0,876, 1,520).

1 μονάδα για ορθή καμπύλη

-2 μονάδες αν για τον υπολογισμό των σημείων δεν λήφθηκε υπόψη η αλλαγή της θέσης ισορροπίας

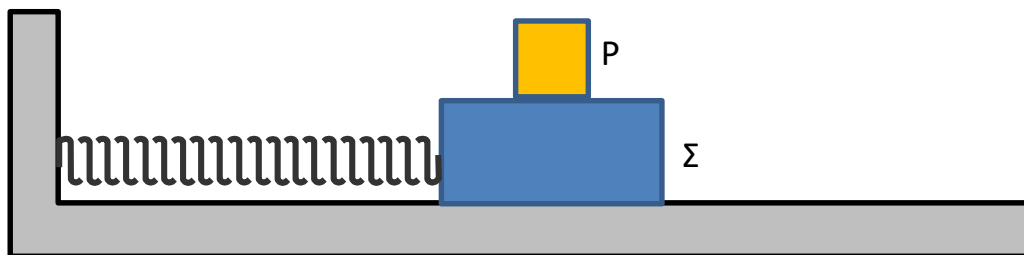
-2 μονάδες αν για τον υπολογισμό των σημείων δεν λήφθηκε υπόψη η αλλαγή της περιόδου

-1 μονάδα αν για τον υπολογισμό των σημείων δεν λήφθηκε υπόψη η αλλαγή του πλάτους

-1 μονάδα αν για τον υπολογισμό των σημείων δεν λήφθηκε ως 0 ο αισθητήρας αλλά η αρχική θέση του σώματος .

ΘΕΜΑ 5^ο

A. Το σώμα Σ έχει μάζα $m_{\Sigma} = 1,500 \text{ kg}$ και είναι συνδεδεμένο με το ένα άκρο ελατηρίου σταθεράς $k = 90 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι συνδεδεμένο σε ακλόνητο σημείο. Το σώμα Σ βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στο σώμα Σ βρίσκεται σώμα Ρ μάζας $m_P = 0,500 \text{ kg}$. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των σωμάτων Σ και Ρ είναι ίσος με $\mu_s = 0,600$.



Το σύστημα των δύο σωμάτων εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα f και πλάτος x_0 .

α. Να υπολογίσετε τη συχνότητα της ταλάντωσης.

(μονάδες 2)

ΛΥΣΗ

Η σταθερά ταλάντωσης του συστήματος D είναι ίση με τη σταθερά του ελατηρίου k .

$$D = k \Rightarrow m_{ολ} \omega^2 = k \text{ (1 μονάδα)} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_{ολ}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{90 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{2 \text{ kg}}} = 1,07 \text{ Hz (1 μονάδα)}$$

β. Να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή της δύναμης της τριβής που ασκείται από το σώμα Σ στο σώμα Ρ για τις πιο κάτω τιμές της θέσης των σωμάτων Σ και Ρ:

i. $x = 0$ (θέση ισορροπίας)

(μονάδες 2)

ΛΥΣΗ

Η δύναμη που αναγκάζει το σώμα Ρ να εκτελεί ΑΑΤ είναι η δύναμη στατικής τριβής που ασκεί σε αυτό το σώμα Σ. Αυτή η δύναμη έχει τη μορφή $f_s = -D_P \cdot x = -m_P \omega^2 \cdot x$ (1 μονάδα).

Άρα για $x = 0$: $f_s = 0$ (1 μονάδα).

ii. $x = 2,00 \text{ cm}$

(μονάδες 2)

ΛΥΣΗ

$$f_s = -0,500 \text{ kg} \cdot 4\pi^2 1,07^2 \text{ Hz}^2 \cdot 0,0200 \text{ m (1 μονάδα)} \Rightarrow f_s = -0,45 \text{ N (1 μονάδα)}$$

iii. $x = -3,00 \text{ cm}$

(μονάδες 2)

ΛΥΣΗ

$$f_s = -0,500 \text{ kg} \cdot 4\pi^2 1,07^2 \text{ Hz}^2 \cdot (-0,0300 \text{ m}) (1 \text{ μονάδα}) \Rightarrow f_s = 0,68 \text{ N} (1 \text{ μονάδα})$$

γ. Να υπολογίσετε το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης των δύο σωμάτων, για το οποίο το σώμα Ρ δεν ολισθαίνει πάνω στο σώμα Σ.

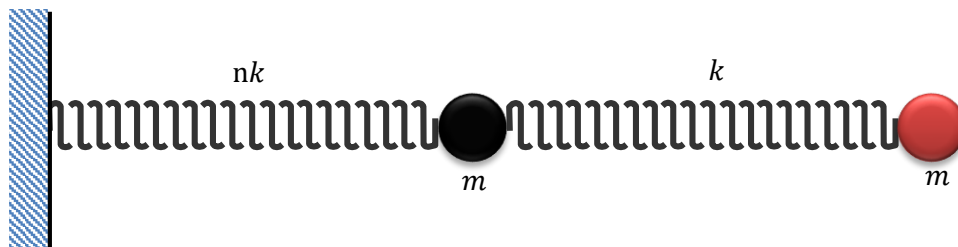
(μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

Η δύναμη που απαιτείται για να μπορεί το σώμα Ρ να εκτελεί ΑΑΤ είναι ανάλογη με τη θέση $\vec{x}$ (1 μονάδα). Όταν το σώμα βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσης του απαιτείται η πιο μεγάλη σε μέτρο δύναμη. Αφού η δύναμη της στατικής τριβής μεταξύ των σωμάτων Ρ και Σ παίρνει μια μέγιστη τιμή ίση με $f_{s\mu\epsilon\gamma} = \mu_s N = \mu_s m_P g$ (1 μονάδα), τότε η μέγιστη απομάκρυνση του σώματος από τη Θέση Ισορροπίας του μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση $f_{s\mu\epsilon\gamma} = m_P \omega^2 x_0$ (1 μονάδα). Άρα,

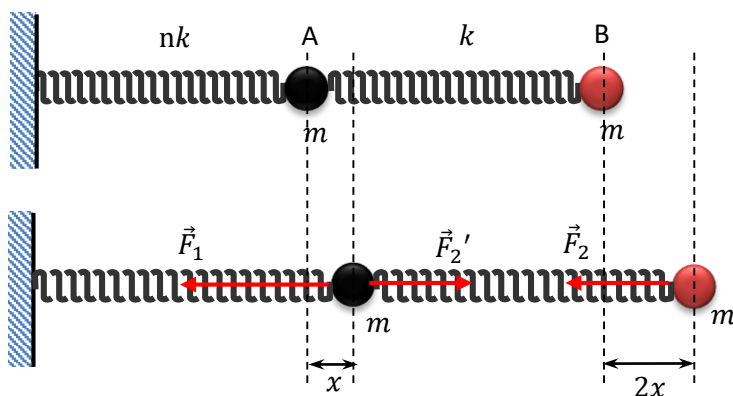
$$x_0 = \frac{\mu_s m_P g}{m_P \omega^2} = 0,13 \text{ m} (1 \text{ μονάδα})$$

Β. Δύο σώματα με μάζες m είναι συνδεδεμένα με ελατήρια με σταθερές k και nk , όπου n είναι ένας θετικός αριθμός. Τα δύο ελατήρια έχουν το ίδιο φυσικό μήκος.



Θεωρώντας ότι είναι δυνατό να επιλεγούν οι αρχικές συνθήκες κίνησης των δύο σωμάτων με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε τα δύο σώματα να εκτελούν ταλάντωση στο λείο οριζόντιο επίπεδο με το μήκος των δύο ελατηρίων να παραμένει συνεχώς το ίδιο, να υπολογίσετε τον αριθμό n .

(μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

Τα δύο ελατήρια έχουν το ίδιο φυσικό μήκος και το μήκος τους συνεχίζει να είναι το ίδιο κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής τους. Αυτό σημαίνει ότι όταν το ελατήριο στα αριστερά τεντωθεί κατά x το ελατήριο στα δεξιά θα έχει τεντωθεί επίσης κατά x (**1 μονάδα**). Το σώμα Α έχει απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας του κατά x και το σώμα Β κατά $2x$ (**1 μονάδα**). Αφού τα δύο σώματα κινούνται ταυτόχρονα σημαίνει ότι η επιτάχυνση του σώματος Β είναι διπλάσια από την επιτάχυνση του Α (**1 μονάδα**).

Εφαρμόζουμε τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα. Στο σώμα Β ασκείται δύναμη από το ελατήριο με σταθερά k (**1 μονάδα**), ενώ στο σώμα Α ασκούνται δυνάμεις από τα δύο ελατήρια (**1 μονάδα**).

$$A: \Sigma F = m \cdot a_A \Rightarrow -nk \cdot x + k \cdot x = m \cdot a_A \Rightarrow a_A = -\frac{(n-1)k}{m}x \text{ (**1 μονάδα**)}$$

$$B: \Sigma F_B = m \cdot a_B \Rightarrow -k \cdot x = m \cdot a_B \Rightarrow a_B = -\frac{k}{m}x \text{ (**1 μονάδα**)}$$

Αφού $a_B = 2a_A$ έχουμε

$$\frac{k}{m} = 2 \frac{(n-1)k}{m} \Rightarrow n = \frac{3}{2} \text{ (**1 μονάδα**)}$$

ΤΕΛΟΣ ΔΟΚΙΜΙΟΥ