

ΕΝΩΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΚΥΠΡΟΥ

32^Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (Α' Φάση)

Κυριακή, 17 Δεκεμβρίου 2017

Ώρα: 10:00 - 13:00

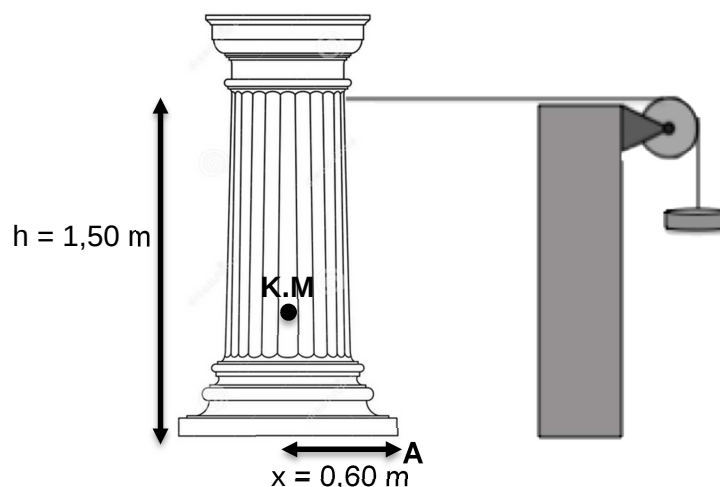


Οδηγίες:

- 1) Το δοκίμιο αποτελείται από οκτώ (8) σελίδες και πέντε (5) θέματα.
- 2) Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα του δοκιμίου.
- 3) Κάθε θέμα βαθμολογείται με 20 μονάδες. Σε κάθε θέμα οι μονάδες κάθε ερωτήματος φαίνονται στο τέλος του ερωτήματος.
- 4) Στο τετράδιο απαντήσεων να αναγράφεται ξεκάθαρα ο αριθμός του θέματος και του ερωτήματος που απαντάτε.
- 5) Επιτρέπεται η χρήση μόνο μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- 6) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- 7) Επιτρέπεται η χρήση ΜΟΝΟ μπλε μελανιού. (Οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
- 8) Τα σχήματα των θεμάτων δεν είναι υπό κλίμακα.
- 9) Δίνεται: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

ΘΕΜΑ 1^ο

Ένα εργαστήριο παραγωγής διακοσμητικών κιόνων ελέγχει τη σταθερότητα της ισορροπίας των κιόνων που κατασκευάζει με τη διάταξη που φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (σχήμα 1). Ο κάθε κίονας έχει μάζα $m = 60,0 \text{ kg}$ και ύψος $l = 2,0 \text{ m}$.



Σχήμα 1

Σε ύψος $h = 1,50 \text{ m}$ από τη βάση του κίονα τοποθετείται ένα οριζόντιο τεντωμένο σχοινί στην άκρη του οποίου τοποθετούνται σταθμά. Η μάζα των σταθμών αυξάνεται μέχρι ο κίονας να αρχίσει να ανατρέπεται γύρω από το σημείο A της βάσης του κίονα. Η οριζόντια απόσταση του κέντρου μάζας του κίονα από το σημείο A είναι $x = 0,60 \text{ m}$.

α. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της μάζας των σταθμών για την οποία ο κίονας μόλις ξεκινά να ανατρέπεται γύρω από το σημείο A.

(μονάδες 4)

β. Μόλις ο κίονας ξεκινήσει να ανατρέπεται το νήμα κόβεται. Να εξηγήσετε, αν ο κίονας θα επανέλθει στην αρχική του θέση ή αν θα πέσει στο έδαφος.

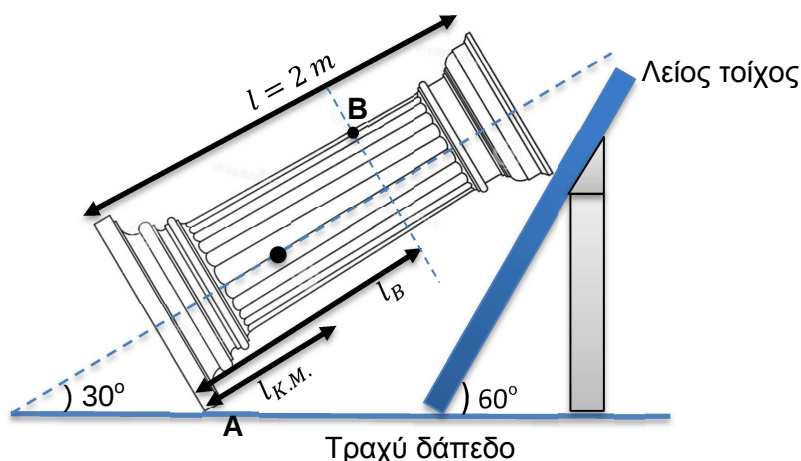
(μονάδες 2)

γ. Να εισηγηθείτε δύο τρόπους με τους οποίους ο κίονας θα έχει καλύτερη ισορροπία.

(μονάδες 2)

δ. Για τις ανάγκες ενός γυρίσματος, ο κίονας τοποθετήθηκε στη θέση που φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (σχήμα 2) ακουμπημένος σε ένα λείο τοίχο που σχηματίζει γωνιά 60° με το οριζόντιο τραχύ δάπεδο.

Το κέντρο μάζας του κίονα βρίσκεται σε απόσταση $l_{K.M.} = \frac{l}{3}$ από το σημείο A.



Σχήμα 2

i. Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στον κίονα.

(μονάδες 2)

ii. Να υπολογίσετε τον ελάχιστο συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ του κίονα και του δαπέδου ώστε ο κίονας να ισορροπεί.

(μονάδες 6)

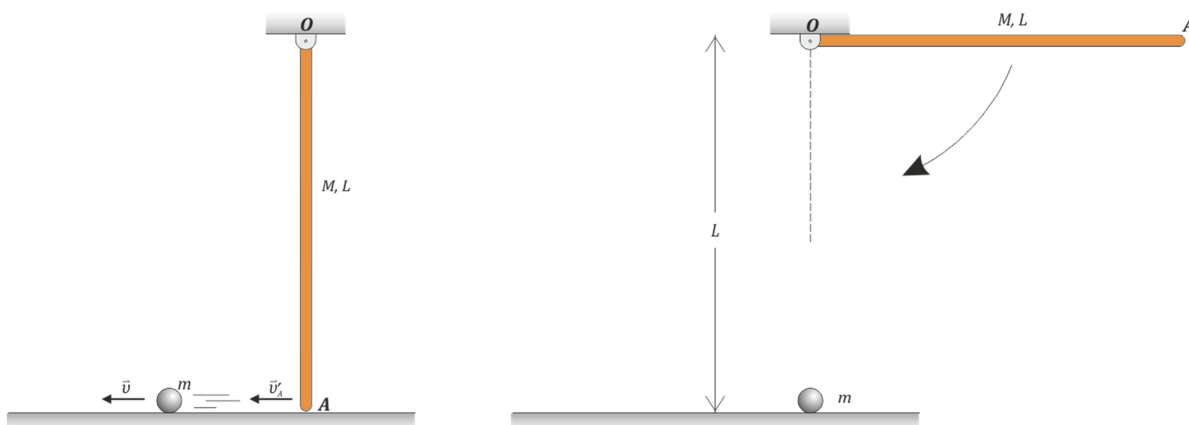
iii. Να διερευνήσετε αν ένας ηθοποιός μάζας $m = 60,0 \text{ kg}$ μπορεί να σταθεί στη θέση B που βρίσκεται σε απόσταση $l_B = \frac{2l}{3}$ από το σημείο A, όταν ο συντελεστής στατικής τριβής του κίονα με το δάπεδο είναι 0,6.

(μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 2^ο

Μία ράβδος μήκους L και μάζας M κρατείται ακίνητη σε οριζόντια θέση σε ύψος L πάνω από το έδαφος. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της, στο σημείο O , όπως φαίνεται στο σχήμα.

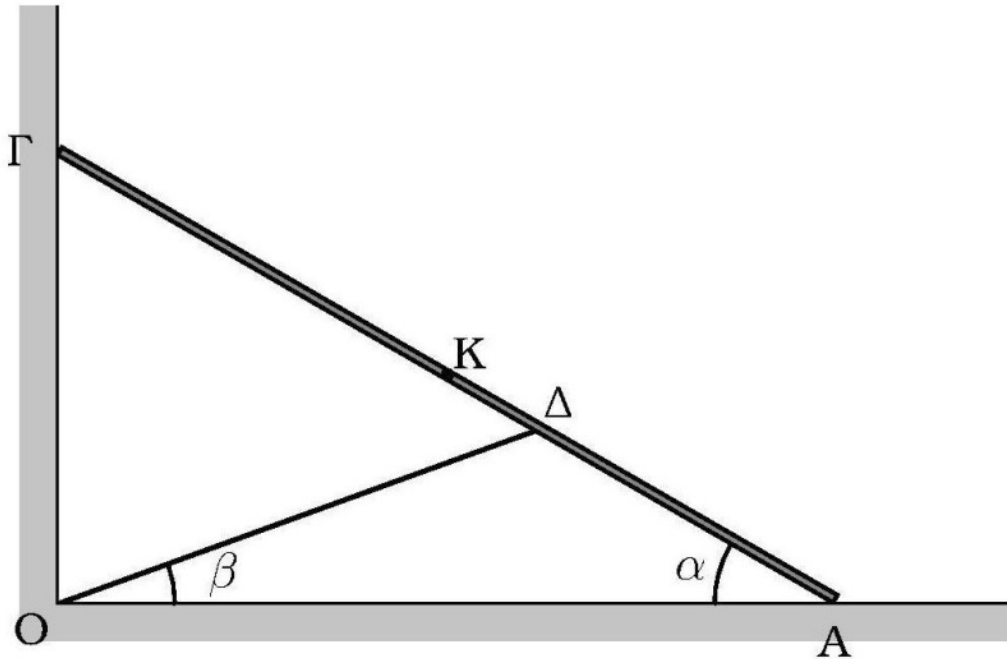
Η ράβδος αφήνεται να περιστραφεί και όταν βρεθεί σε κατακόρυφη θέση συγκρούεται με μία αρχικά ακίνητη σφαίρα μάζας $m = M/3$. Η χρονική διάρκεια της σύγκρουσης είναι πολύ μικρή και αμέσως μετά τη σύγκρουση η σφαίρα κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου $|\vec{v}| = |\vec{v}_A|/2$, όπου $\vec{v}_A$ είναι η ταχύτητα του άκρου A της ράβδου τη στιγμή που βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής δίνεται από τη σχέση: $I = MR^2/3$



- α. Να υπολογίσετε (συναρτήσει του L) το μέτρο $|\vec{v}_A|$ της ταχύτητας του άκρου A της ράβδου, τη στιγμή που βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση. (μονάδες 3)
- β. Να αποδείξετε ότι η δυναμική ενέργεια της ράβδου ως προς το έδαφος για κάθε τιμή της γωνίας φ που σχηματίζει με τον κατακόρυφο άξονα δίνεται από τη σχέση $U_{βαρ} = \frac{MgL}{2}(2 - \sin\varphi)$ (μονάδες 3)
- γ. Να σχεδιάσετε τις εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα ράβδου – σφαίρας κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης και να διερευνήσετε αν διατηρείται η στροφορμή του συστήματος. (μονάδες 3)
- δ. Να υπολογίσετε την ταχύτητα $\vec{v}'_A$ του άκρου A της ράβδου αμέσως μετά την σύγκρουση. (μονάδες 5)
- ε. Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος, στο οποίο θα φθάσει το άκρο A της ράβδου μετά τη σύγκρουση. (μονάδες 3)
- στ. Να υπολογίσετε τη γωνία θ που θα σχηματίζει η ράβδος τη στιγμή που θα σταματήσει - στιγμιαία- να περιστρέφεται. (μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. Μια ομογενής ράβδος ΑΓ βάρους $\vec{B}$ ισορροπεί με τη βοήθεια νήματος ΟΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι δύο επιφάνειες, οριζόντια και κατακόρυφη, στις οποίες ακουμπούν τα άκρα της ράβδου είναι **λείες**. Το σημείο Κ είναι το κέντρο βάρους της ράβδου.



α. Να δείξετε ότι η τάση του νήματος ΟΔ δίνεται από τη σχέση

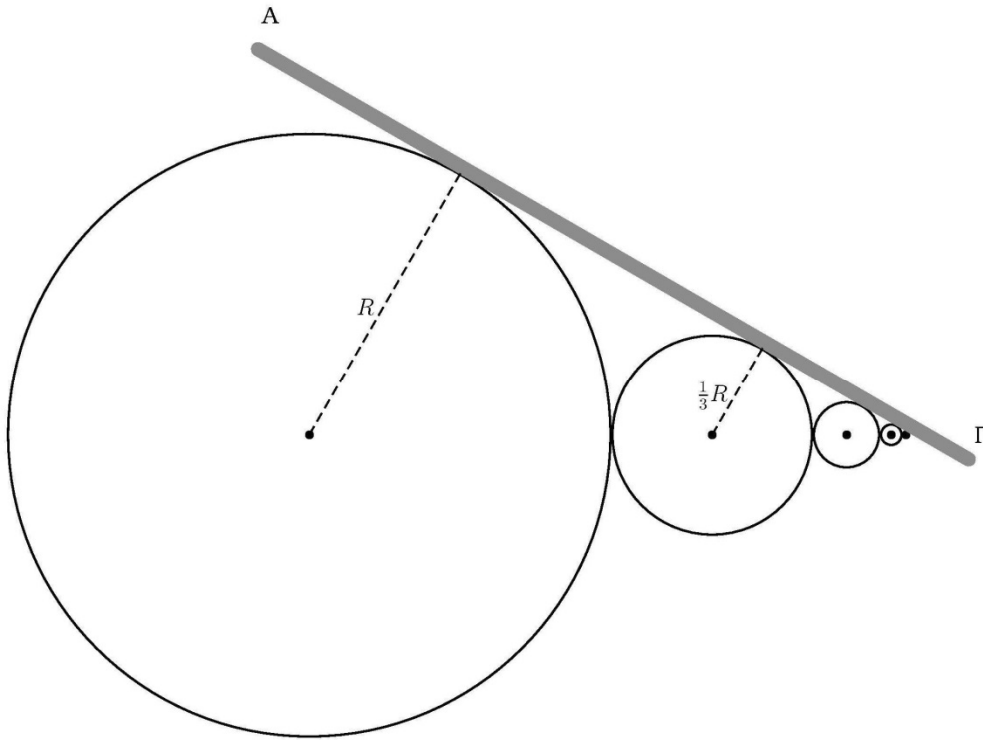
$$|\vec{T}| = \frac{|\vec{B}| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{2\eta\mu(\alpha - \beta)}$$

(μονάδες 7)

β. Να εξηγήσετε για ποιες θέσεις του σημείου Δ στη ράβδο δεν θα είναι δυνατό να ισορροπεί η ράβδος στηριζόμενη και στις δύο επιφάνειες.

(μονάδες 3)

Β. Μια άπειρη σειρά ομογενών δίσκων από το ίδιο υλικό είναι προσαρμοσμένοι σε μια κατακόρυφη επιφάνεια έτσι ώστε τα κέντρα των κύκλων να βρίσκονται στην ίδια οριζόντια ευθεία. Η ακτίνα του πρώτου δίσκου είναι R και η μάζα του m , ενώ η ακτίνα κάθε επόμενου δίσκου είναι ίση με το $1/3$ της ακτίνας του προηγούμενου. Κάθε δίσκος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Οι δίσκοι μόλις που δεν έρχονται σε επαφή. Μια ράβδος ΑΓ, με μάζα ίση με τη μάζα του μεγάλου δίσκου, τοποθετείται πάνω στους δίσκους, όπως φαίνεται στο σχήμα και αφήνεται να κινηθεί.



Αν κατά την κίνηση της ράβδου πάνω στους δίσκους δεν υπάρχει ολίσθηση, να υπολογίσετε την επιτάχυνση της ράβδου για όσο χρόνο θα είναι σε επαφή με όλους τους δίσκους.

Δίνονται:

Ροπή αδράνειας δίσκου: $I = \frac{1}{2}mR^2$,

Άθροισμα άπειρων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το α_1 και λόγο λ :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \frac{\alpha_1}{1 - \lambda}$$

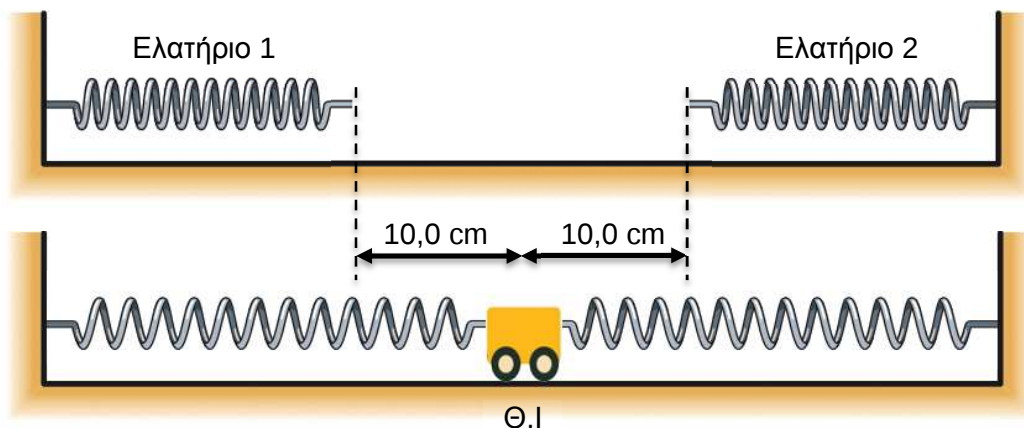
(μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4^ο

Στο σχήμα που ακολουθεί (σχήμα 1) απεικονίζονται δύο **όμοια**, αβαρή και οριζόντια ελατήρια 1 και 2, με το ίδιο μήκος ισορροπίας L_0 και σταθερά ελατηρίου k .

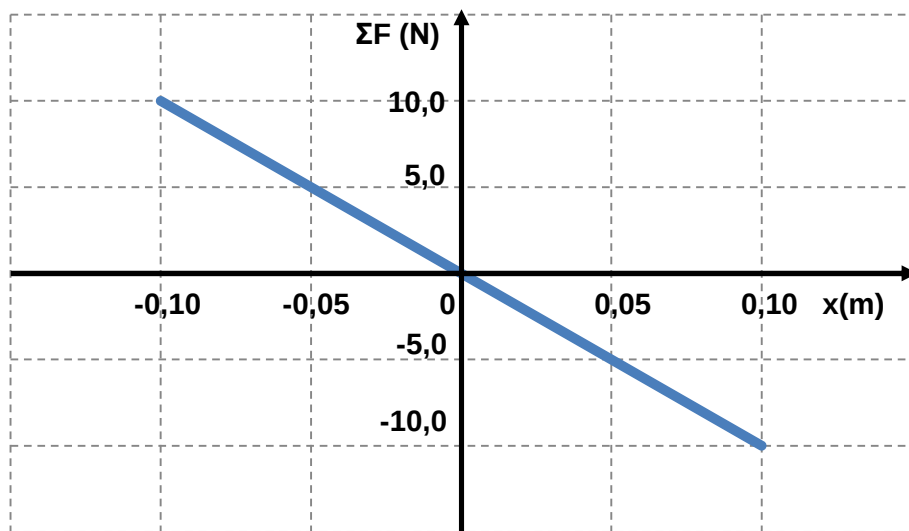
Το ένα άκρο του κάθε ελατηρίου είναι συνδεδεμένο με ακλόνητο τοίχο ενώ στο άλλο του άκρο βρίσκεται συνδεδεμένο ένα αμαξάκι μάζας $m = 0,400 \text{ kg}$ το οποίο μπορεί να κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

Όταν το αμαξάκι βρίσκεται στη θέση ισορροπίας, τα δύο ελατήρια έχουν επιμήκυνση $10,0 \text{ cm}$.



Σχήμα 1

Στο επόμενο σχήμα (σχήμα 2) φαίνεται η γραφική παράσταση της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το αμαξάκι σε σχέση με τη θέση του, $\Sigma F = f(x)$.



Σχήμα 2



Το αμαξάκι εκτρέπεται κατά 10,0 cm προς τα αριστερά από τη θέση ισορροπίας του και την χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνεται ελεύθερο. Να θεωρήσετε ότι η θετική κατεύθυνση κίνησης του αμαξιού είναι προς τα δεξιά.

α. Να εξηγήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση $\Sigma F = f(x)$, γιατί όταν το αμαξάκι αφεθεί ελεύθερο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

(μόνάδες 2)

β. Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση $\Sigma F = f(x)$ για να υπολογίσετε τη σταθερά της ταλάντωσης.

(μόνάδες 2)

γ. Να υπολογίσετε τη σταθερά k των ελατηρίων.

(μόνάδες 2)

δ. Να γράψετε την εξίσωση της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το αμαξάκι αντικαθιστώντας στη γενική της μορφή τις σταθερές τιμές.

(μόνάδες 3)

ε. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας που έχει το αμαξάκι όταν αυτό διέρχεται από θέση στην οποία η επιτάχυνση έχει μέτρο ίσο με το μισό της μέγιστης επιτάχυνσης.

(μόνάδες 3)

στ. Όταν το αμαξάκι φτάνει για πρώτη φορά σε ακραία θέση (μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$) το ελατήριο 2 κόβεται.

i. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή στην οποία το αμαξάκι θα επανέλθει στη θέση από την οποία αφέθηκε ελεύθερο.

(μόνάδες 4)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της θέσης του αμαξιού σε σχέση με τον χρόνο για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 0,34$ s.

(μόνάδες 4)

ΘΕΜΑ 5^ο

Ομογενής κυλινδρική τροχαλία μάζας m και ακτίνας R μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της O . Στην περιφέρεια της τροχαλίας είναι τυλιγμένο μη ελαστικό νήμα αμελητέας μάζας. Στο άκρο του νήματος βρίσκεται σώμα Σ_1 μάζας m_1 . Η τροχαλία ισορροπεί με τη βοήθεια σώματος Σ_2 μάζας m_2 και αμελητέων διαστάσεων, το οποίο είναι στερεωμένο στην περιφέρεια της τροχαλίας. Όταν η τροχαλία ισορροπεί, η ακτίνα θέσης του σωματιδίου σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Περιστρέφουμε την τροχαλία κατά μικρή γωνία $\Delta\theta$ και την αφήνουμε ελεύθερη.

α. Να δείξετε ότι το σώμα Σ_1 θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

Δίνονται:

Ροπή αδράνειας κυλίνδρου: $I = \frac{1}{2} mR^2$

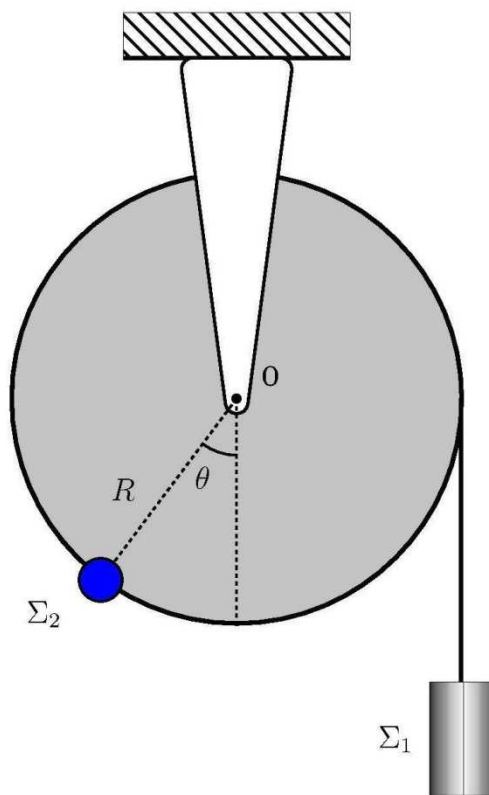
Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος και διαφοράς δύο γωνιών:

$$\eta\mu(\alpha \pm \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta \pm \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

(μονάδες 16)

β. Να εξαγάγετε τη σχέση για την περίοδο ταλάντωσης του σώματος Σ_1 σε συνάρτηση με τα μεγέθη m, m_2, θ και g .

(μονάδες 4)



ΤΕΛΟΣ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΕΝΩΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΚΥΠΡΟΥ

32^Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (Α' Φάση)

Κυριακή, 17 Δεκεμβρίου 2017

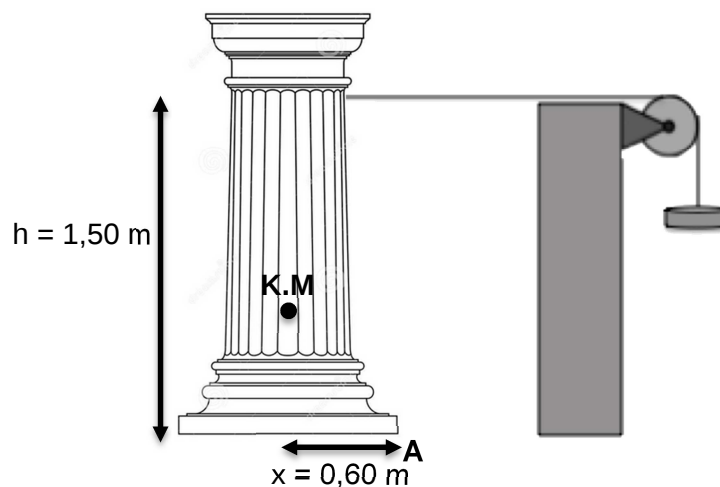
Ώρα: 10:00 - 13:00



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Ένα εργαστήριο παραγωγής διακοσμητικών κιόνων ελέγχει τη σταθερότητα της ισορροπίας των κιόνων που κατασκευάζει με τη διάταξη που φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (σχήμα 1). Ο κάθε κίονας έχει μάζα $m = 60,0 \text{ kg}$ και ύψος $l = 2,0 \text{ m}$.



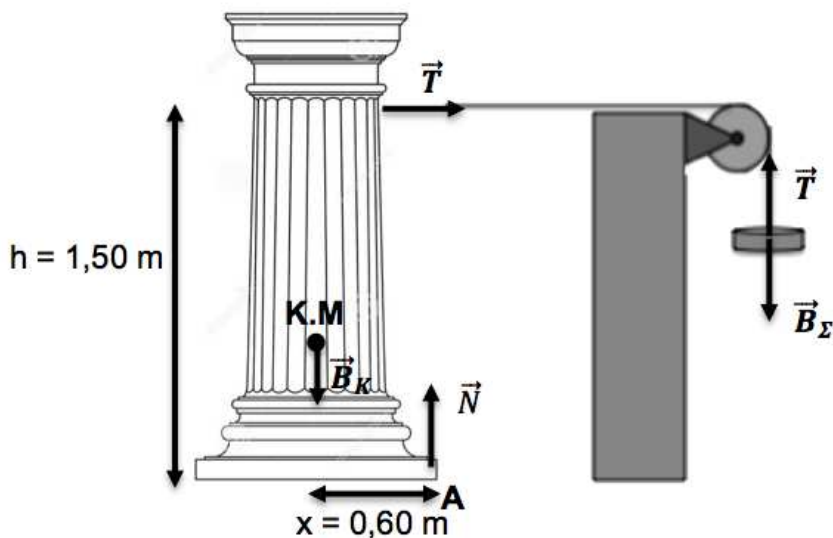
Σχήμα 1

Σε ύψος $h = 1,50 \text{ m}$ από τη βάση του κίονα τοποθετείται ένα οριζόντιο τεντωμένο σχοινί στην άκρη του οποίου τοποθετούνται σταθμά. Η μάζα των σταθμών αυξάνεται μέχρι ο κίονας να αρχίσει να ανατρέπεται γύρω από το σημείο Α της βάσης του κίονα. Η οριζόντια απόσταση του κέντρου μάζας του κίονα από το σημείο Α είναι $x = 0,60 \text{ m}$.

α. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της μάζας των σταθμών για την οποία ο κίονας μόλις ξεκινά να ανατρέπεται γύρω από το σημείο Α.

(μονάδες 4)

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κίονα και στα σταθμά φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα.



$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow |\vec{T}| = |\vec{B}_Z| \quad (1 \text{ μον.})$$

$$\Sigma \vec{M} = 0 \Rightarrow |\vec{M}_{B_K}| = |\vec{M}_T| \Rightarrow |\vec{B}_K| \cdot x = |\vec{T}| \cdot h \Rightarrow |\vec{B}_K| \cdot x = |\vec{B}_Z| \cdot h \quad (2 \text{ μον.})$$

$$60,0 \text{ kg} \cdot g \cdot 0,60 \text{ m} = m_Z \cdot g \cdot 1,50 \text{ m} \Rightarrow m_Z = 24 \text{ kg} \quad (1 \text{ μον.})$$

β. Μόλις ο κίονας ξεκινήσει να ανατρέπεται το νήμα κόβεται. Να εξηγήσετε, αν ο κίονας θα επανέλθει στην αρχική του θέση ή αν θα πέσει στο έδαφος.

(μονάδες 2)

Ο κίονας θα επιστρέψει στη θέση του (1 μον.) λόγω της ροπής του βάρους ως προς το Α (1 μον.) που είναι αριστερόστροφη και θα τον επαναφέρει στη θέση του.

γ. Να εισηγηθείτε δύο τρόπους με τους οποίους ο κίονας θα έχει καλύτερη ισορροπία.

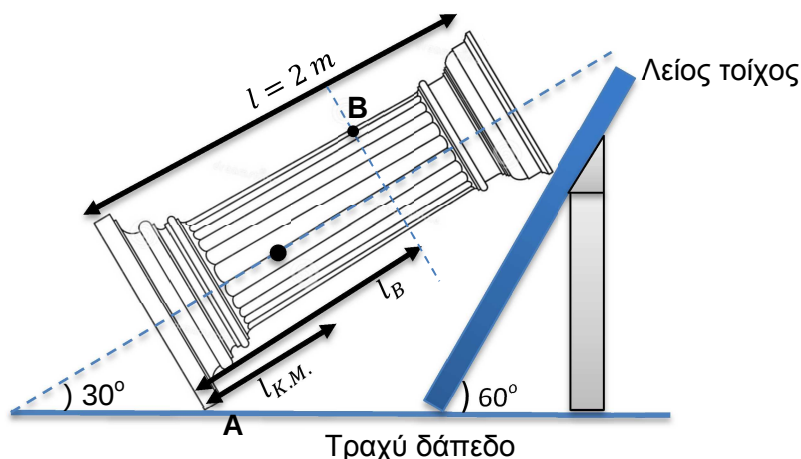
(μονάδες 2)

1^{ος} τρόπος: Να μεγαλώσει η βάση στήριξης του κίονα. (1 μον.)

2^{ος} τρόπος: Το Κ.Μ του κίονα να έχει μικρότερη απόσταση από το έδαφος. (1 μον.)

δ. Για τις ανάγκες ενός γυρίσματος, ο κίονας τοποθετήθηκε στη θέση που φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (σχήμα 2) ακουμπημένος σε ένα λείο τοίχο που σχηματίζει γωνιά 60° με το οριζόντιο τραχύ δάπεδο.

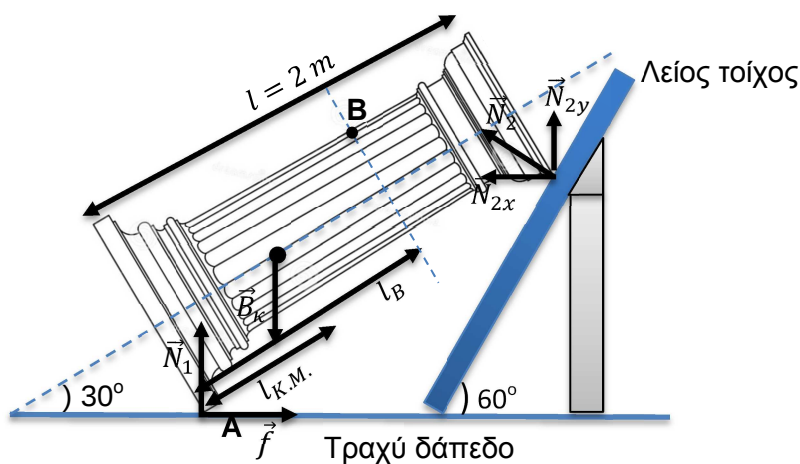
Το κέντρο μάζας του κίονα βρίσκεται σε απόσταση $l_{K.M} = \frac{l}{3}$ από το σημείο Α.



Σχήμα 2

- i. Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στον κίονα.

(μονάδες 2)



(2 μον.) για σωστό σχεδιασμό των τεσσάρων δυνάμεων

(1 μον.) για σωστό σχεδιασμό τριών δυνάμεων

(0 μον.) για σωστό σχεδιασμό μόνο δύο ή μιας δύναμης ή το σχεδιασμό δύναμης που δεν ασκείται στο σώμα

- ii. Να υπολογίσετε τον ελάχιστο συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ του κίονα και του δαπέδου ώστε ο κίονας να ισορροπεί.

(μονάδες 6)

$$\Sigma \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{M}_{B_K} + \vec{M}_{N_2} = 0 \quad \text{(1 μον.)}$$

$$|\vec{N}_2| \cdot l \cdot \eta \mu 60^\circ - m_K \cdot g \cdot \frac{l}{3} \cdot \sigma \nu \nu 30^\circ = 0$$

$$|\vec{N}_2| \cdot l \cdot \eta \mu 60^\circ = m_K \cdot g \cdot \frac{l}{3} \cdot \sigma \nu \nu 30^\circ = 0$$



$$|\vec{N}_2| = \frac{m_K \cdot g}{3} \quad (1 \text{ μον.})$$

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow |\vec{N}_{2y}| + |\vec{N}_1| = |\vec{B}_K| \quad (1 \text{ μον.})$$

$$|\vec{N}_2| \cdot \sin 60^\circ + |\vec{N}_1| = |\vec{B}_K|$$

$$\frac{m_K \cdot g}{3} \cdot \frac{1}{2} + |\vec{N}_1| = m_K \cdot g$$

$$|\vec{N}_1| = \frac{5 \cdot m_K \cdot g}{6} \quad (1 \text{ μον.})$$

$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow |\vec{N}_{2x}| = |\vec{f}| \Rightarrow |\vec{N}_2| \cdot \eta \mu 60^\circ = \mu_{\sigma\tau} \cdot |\vec{N}_1| \quad (1 \text{ μον.})$$

$$\mu_{\sigma\tau} = \frac{|\vec{N}_2| \cdot \eta \mu 60^\circ}{|\vec{N}_1|} = \frac{\frac{m_K \cdot g}{3} \cdot \eta \mu 60^\circ}{\frac{5 \cdot m_K \cdot g}{6}} = 0,35 \quad (1 \text{ μον.})$$

- iii. Να διερευνήσετε αν ένας ηθοποιός μάζας $m = 60,0 \text{ kg}$ μπορεί να σταθεί στη θέση Β που βρίσκεται σε απόσταση $l_B = \frac{2l}{3}$ από το σημείο Α, όταν ο συντελεστής στατικής τριβής του κίονα με το δάπεδο είναι 0,6.

(μονάδες 4)

$$\Sigma \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{M}_{B_K} + \vec{M}_{N_2} + \vec{M}_{B_H} = 0$$

$$|\vec{N}_2| \cdot l \cdot \eta \mu 60^\circ - m_K \cdot g \cdot \frac{l}{3} \cdot \sin 30^\circ - m_H \cdot g \cdot \frac{2l}{3} \cdot \sin 30^\circ = 0$$

$$|\vec{N}_2| = 60,0 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{3} - 60,0 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{2}{3} = 588,6 \text{ N} \quad (1 \text{ μον.})$$

$$|\vec{N}_{2x}| = \vec{N}_2 \cdot \eta \mu 60^\circ = 509,7 \text{ N}$$

$$|\vec{N}_{2y}| = \vec{N}_2 \cdot \sin 60^\circ = 294,3 \text{ N}$$

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow |\vec{N}_{2y}| + |\vec{N}_1| = |\vec{B}_K| + |\vec{B}_H|$$

$$|\vec{N}_1| = m_K \cdot g + m_H \cdot g - |\vec{N}_2| \cdot \sin 60^\circ = 882,9 \text{ N} \quad (1 \text{ μον.})$$

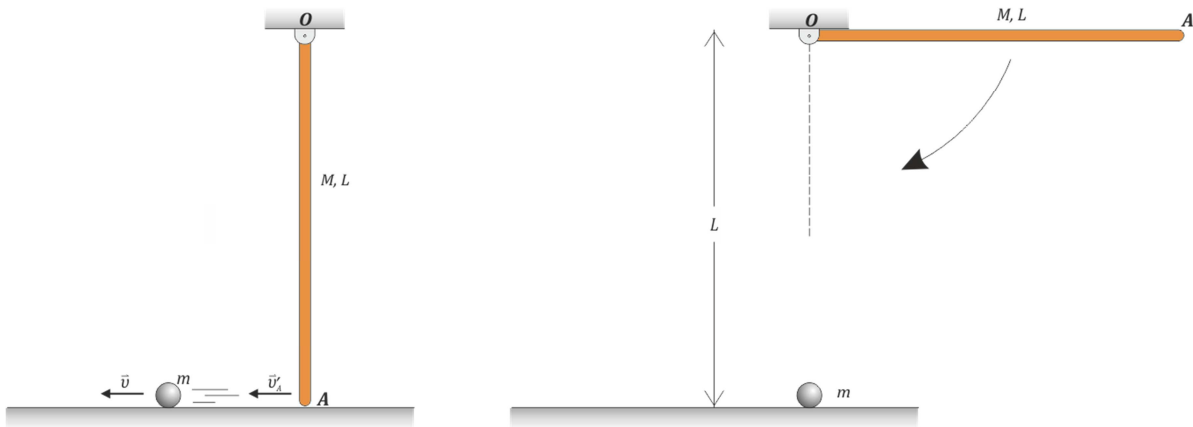
$$|\vec{f}_{\sigma\tau_{\max}}| = \mu_{\sigma\tau} \cdot |\vec{N}_1| = 529,7 \text{ N} \quad (1 \text{ μον.})$$

$$|\vec{f}_{\sigma\tau_{\max}}| > |\vec{N}_{2x}| \Rightarrow \text{ισορροπεί} \quad (1 \text{ μον.})$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Μία ράβδος μήκους L και μάζας M κρατείται ακίνητη σε οριζόντια θέση σε ύψος L πάνω από το έδαφος. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της, στο σημείο O , όπως φαίνεται στο σχήμα.

Η ράβδος αφήνεται να περιστραφεί και όταν βρεθεί σε κατακόρυφη θέση συγκρούεται με μία αρχικά ακίνητη σφαίρα μάζας $m = M/3$. Η χρονική διάρκεια της σύγκρουσης είναι πολύ μικρή και αμέσως μετά τη σύγκρουση η σφαίρα κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου $|\vec{v}| = |\vec{v}_A|/2$, όπου $\vec{v}_A$ είναι η ταχύτητα του άκρου A της ράβδου τη στιγμή που βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής δίνεται από τη σχέση: $I = MR^2/3$



- α. Να υπολογίσετε (συναρτήσει του L) το μέτρο $|\vec{v}_A|$ της ταχύτητας του άκρου A της ράβδου, τη στιγμή που βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση.

(μονάδες 3)

$$E_{\mu\eta\chi}^{(1)} = E_{\mu\eta\chi}^{(2)} \Rightarrow MgL = Mg\frac{L}{2} + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (1 \text{ μον.}) \Rightarrow g\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\omega^2 \quad (1 \text{ μον.}) \Rightarrow$$

$$v_A^2 = 3gL \Rightarrow v_A = \sqrt{3gL} \quad (1 \text{ μον.})$$

- β. Να αποδείξετε ότι η δυναμική ενέργεια της ράβδου ως προς το έδαφος για κάθε τιμή της γωνίας φ που σχηματίζει με τον κατακόρυφο άξονα δίνεται από τη σχέση

$$U_{\beta\alpha\rho} = \frac{MgL}{2}(2 - \sin\varphi)$$

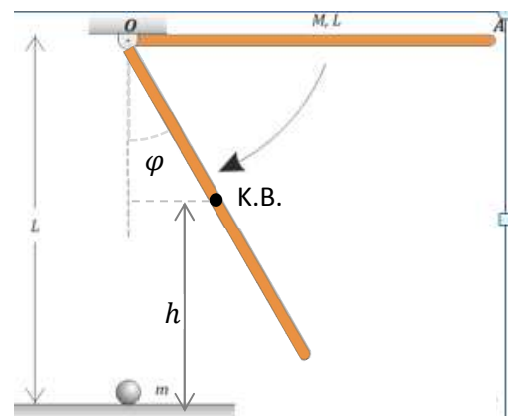
(μονάδες 3)

Όταν η ράβδος σχηματίζει γωνία φ με την κατακόρυφο η δυναμική της ενέργεια ως προς το έδαφος θα είναι

$$U_{\beta\alpha\rho} = Mgh \quad (1 \text{ μον.})$$

Όπου h είναι το ύψος στο οποίο βρίσκεται το κέντρο βάρους της ράβδου. Αυτό το ύψος θα είναι ίσο με

$$h = L - \frac{L}{2}\sin\varphi = \frac{L}{2}(2 - \sin\varphi) \quad (1 \text{ μον.})$$

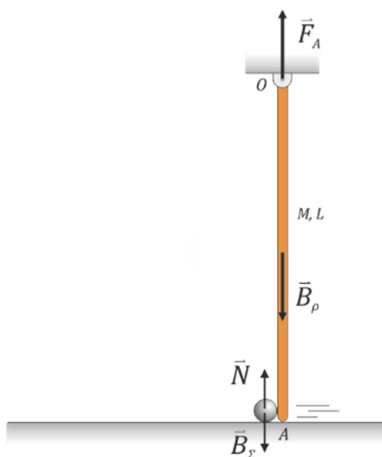


Άρα η δυναμική ενέργεια της ράβδου θα είναι

$$U_{βαρ} = \frac{MgL}{2} (2 - \sin\varphi) \quad (1 \text{ μον.})$$

- γ. Να σχεδιάσετε τις εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα ράβδου – σφαίρας κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης και να διερευνήσετε αν διατηρείται η στροφορμή του συστήματος.

(μονάδες 3)



Οι φορείς των δυνάμεων F_A και B_ρ διέρχονται από τον άξονα περιστροφής, οπότε η ροπή τους είναι μηδέν. (1 μον.)

Οι δυνάμεις N και B_x έχουν κοινό σημείο εφαρμογής και συνισταμένη μηδέν, οπότε, λόγω του θεωρήματος των ροπών, η ροπή τους είναι μηδενική. (1 μον.)

Συνεπώς, η στροφορμή του συστήματος διατηρείται κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης. (1 μον.)

- δ. Να υπολογίσετε την ταχύτητα $\vec{v}'_A$ του άκρου A της ράβδου αμέσως μετά την σύγκρουση.

(μονάδες 5)

$$\begin{aligned} L_{\pi\rho\nu} &= L_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} \quad (1 \text{ μον.}) \Rightarrow I\omega_{\pi\rho\nu} = mvL + I\omega_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} \quad (1 \text{ μον.}) \Rightarrow \frac{ML^2}{3} \frac{v_A}{L} \\ &= \frac{M}{3} \frac{v_A}{2} L + \frac{ML^2}{3} \frac{v'_A}{L} \quad (1 \text{ μον.}) \Rightarrow \\ \frac{ML}{3} \sqrt{3gL} &= \frac{ML}{6} \sqrt{3gL} + \frac{ML}{3} v'_A \quad (1 \text{ μον.}) \\ \Rightarrow v'_A &= \frac{\sqrt{3gL}}{2} \quad (1 \text{ μον.}) \end{aligned}$$

- ε. Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος, στο οποίο θα φθάσει το άκρο A της ράβδου μετά τη σύγκρουση.

(μονάδες 3)

Αν συμβολίσουμε με Δh την ανύψωση του κέντρου μάζας της ράβδου πάνω από το σημείο στο οποίο βρίσκεται όταν η ράβδος είναι κατακόρυφη, τότε στην ακραία θέση στην οποία η ράβδος στιγμιαία σταματά θα ισχύει

$$\begin{aligned} E_{\mu\eta\chi}^{(2)} &= E_{\mu\eta\chi}^{(3)} \Rightarrow Mg \frac{L}{2} + \frac{1}{2} I \omega_{\mu\epsilon\tau\alpha}^2 = Mg \left(\frac{L}{2} + \Delta h \right) \quad (1 \text{ μον.}) \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{ML^2}{3} \omega_{\mu\epsilon\tau\alpha}^2 = Mg \Delta h \xrightarrow{(v'_A = \omega_{\mu\epsilon\tau\alpha} \cdot L)} \\ \Delta h &= \frac{v_A'^2}{6g} = \frac{\frac{3gL}{4}}{6g} = \frac{L}{8} \quad (1 \text{ μον.}) \end{aligned}$$

Το άκρο Α της ράβδου θα ανυψωθεί κατά $h_A = 2\Delta h$. Άρα $h_A = \frac{L}{4}$. **(1 μον.)**

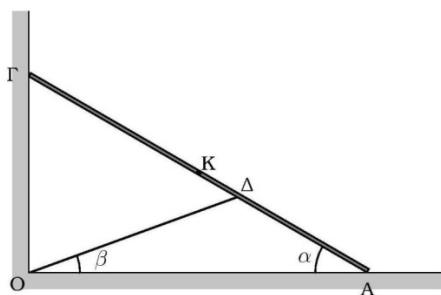
στ. Να υπολογίσετε τη γωνία θ που θα σχηματίζει η ράβδος τη στιγμή που θα σταματήσει - στιγμιαία- να περιστρέφεται.

(μονάδες 3)

$$\sin\theta = \frac{L - h_A}{L} \text{ **(1 μον.)** } \Rightarrow \sin\theta = \frac{L - \frac{L}{4}}{L} = \frac{3}{4} \text{ **(1 μον.)** } \Rightarrow \theta = 41,4^\circ \text{ **(1 μον.)** }$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. Μια ομογενής ράβδος ΑΓ βάρους $\vec{B}$ ισορροπεί με τη βοήθεια νήματος ΟΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι δύο επιφάνειες, οριζόντια και κατακόρυφη, στις οποίες ακουμπούν τα άκρα της ράβδου είναι **λείες**. Το σημείο Κ είναι το κέντρο βάρους της ράβδου.

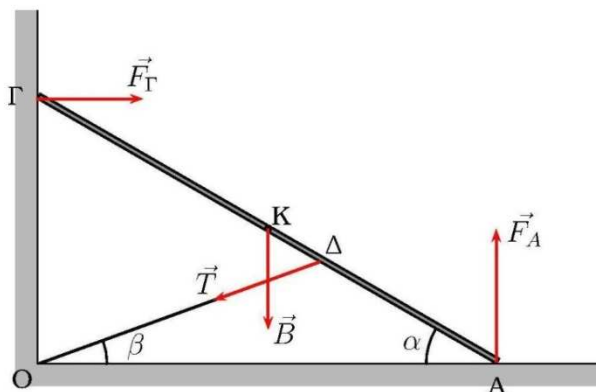


α. Να δείξετε ότι η τάση του νήματος ΟΔ δίνεται από τη σχέση

$$|\vec{T}| = \frac{|\vec{B}| \cdot \sin\alpha}{2\eta\mu(\alpha - \beta)}$$

(μονάδες 7)

Αφού η ράβδος ισορροπεί ισχύουν οι συνθήκες ισορροπίας στερεού σώματος, δηλαδή $\Sigma \vec{F} = 0$ και $\Sigma \vec{M} = 0$ **(1 μον.)**. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα **(1 μον.)**:





Από τη συνθήκη για τις δυνάμεις προκύπτει ότι **(2 μον.)**

$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow |\vec{F}_T| - |\vec{T}| \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = 0 \Rightarrow |\vec{F}_T| = |\vec{T}| \cdot \sigma\upsilon\nu\beta \quad (1)$$

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow |\vec{F}_A| - |\vec{T}| \cdot \eta\mu\beta - |\vec{B}| = 0 \Rightarrow |\vec{F}_A| = |\vec{T}| \cdot \eta\mu\beta + |\vec{B}| \quad (2)$$

Από τη συνθήκη για τις ροπές (τις οποίες θα υπολογίσουμε ως προς το σημείο O) θα έχουμε **(1 μον.)**:

$$\Sigma \vec{M}_O = 0 \Rightarrow |\vec{F}_A| \cdot l \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha - |\vec{B}| \cdot \frac{l}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha - |\vec{F}_T| \cdot l \cdot \eta\mu\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$2|\vec{F}_A| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha - |\vec{B}| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha - 2|\vec{F}_T| \cdot \eta\mu\alpha = 0 \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας στην (3) τις $|\vec{F}_T|$ και $|\vec{F}_A|$ από τις σχέσεις (1) και (2), αντίστοιχα, θα πάρουμε τη σχέση **(1 μον.)**

$$2(|\vec{T}| \cdot \eta\mu\beta + |\vec{B}|) \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha - |\vec{B}| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha - 2|\vec{T}| \cdot \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \eta\mu\alpha = 0$$

από την οποία προκύπτει ότι **(1 μον.)**

$$|\vec{T}| = \frac{|\vec{B}| \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{2\eta\mu(\alpha - \beta)} \quad (4)$$

- β.** Να εξηγήσετε για ποιες θέσεις του σημείου Δ στη ράβδο δεν θα είναι δυνατό να ισορροπεί η ράβδος στηριζόμενη και στις δύο επιφάνειες.

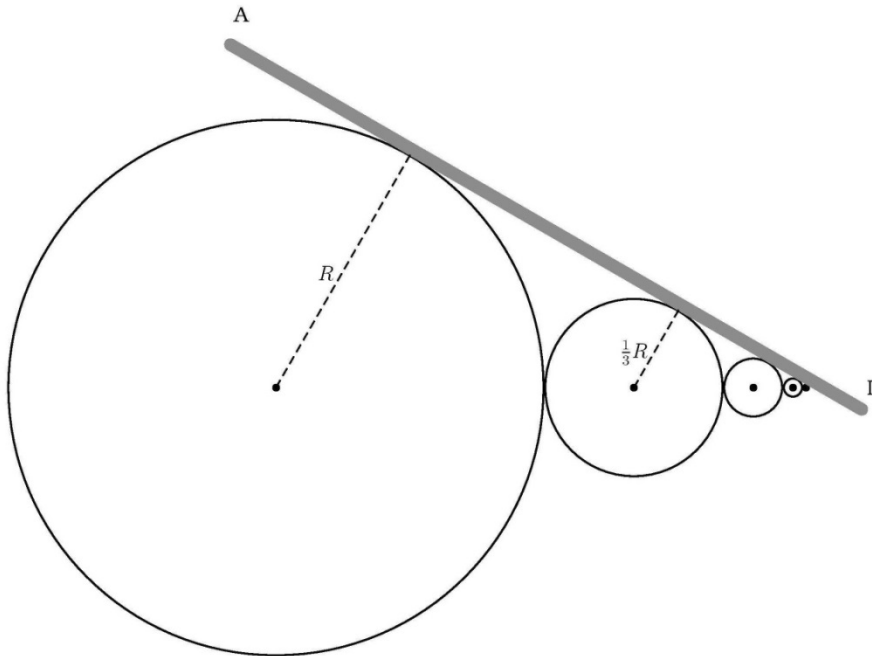
(μονάδες 3)

Η ράβδος θα ισορροπεί εάν το νήμα τεντώνεται πριν το άκρο Γ της ράβδου ακουμπήσει στην οριζόντια επιφάνεια **(1 μον.)**. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν το σημείο Δ βρίσκεται μεταξύ των σημείων Κ και Α **(1 μον.)**, αφού μόνο για αυτά τα σημεία το μήκος του τμήματος της ράβδου ΓΔ θα είναι μεγαλύτερο από το μήκος του νήματος ΟΔ. Άρα, αν το σημείο Δ βρίσκεται σε οποιαδήποτε θέση από το Κ μέχρι το Γ, η ράβδος δεν θα ισορροπήσει στις δύο επιφάνειες **(1 μον.)**

Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει και από την ανάλυση του αποτελέσματος για τη δύναμη $\vec{T}$ (σχέση (4)). Για να είναι $|\vec{T}| > 0$ (και άρα να είναι τεντωμένο το νήμα) **(1 μον.)** θα πρέπει $\alpha - \beta > 0$. Από τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτει ότι αυτό συμβαίνει αν το σημείο Δ βρίσκεται μεταξύ Α και Κ **(1 μον.)**. Άρα, αν το σημείο Δ βρίσκεται σε οποιαδήποτε θέση από το Κ μέχρι το Γ, η ράβδος δεν θα ισορροπήσει στις δύο επιφάνειες **(1 μον.)**

- Β.** Μια άπειρη σειρά ομογενών δίσκων από το ίδιο υλικό είναι προσαρμοσμένοι σε μια κατακόρυφη επιφάνεια έτσι ώστε τα κέντρα των κύκλων να βρίσκονται στην ίδια οριζόντια ευθεία. Η ακτίνα του πρώτου δίσκου είναι R και η μάζα του m , ενώ η ακτίνα κάθε επόμενου δίσκου είναι ίση με το $1/3$ της ακτίνας του προηγούμενου. Κάθε δίσκος μπορεί να

περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Οι δίσκοι μόλις που δεν έρχονται σε επαφή. Μια ράβδος ΑΓ, με μάζα ίση με τη μάζα του μεγάλου δίσκου, τοποθετείται πάνω στους δίσκους, όπως φαίνεται στο σχήμα και αφήνεται να κινηθεί.



Αν κατά την κίνηση της ράβδου πάνω στους δίσκους δεν υπάρχει ολίσθηση, να υπολογίσετε την επιτάχυνση της ράβδου για όσο χρόνο θα είναι σε επαφή με όλους τους δίσκους.

Δίνονται:

Ροπή αδράνειας δίσκου: $I = \frac{1}{2} m R^2$,

Άθροισμα άπειρων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το α_1 και λόγο λ :

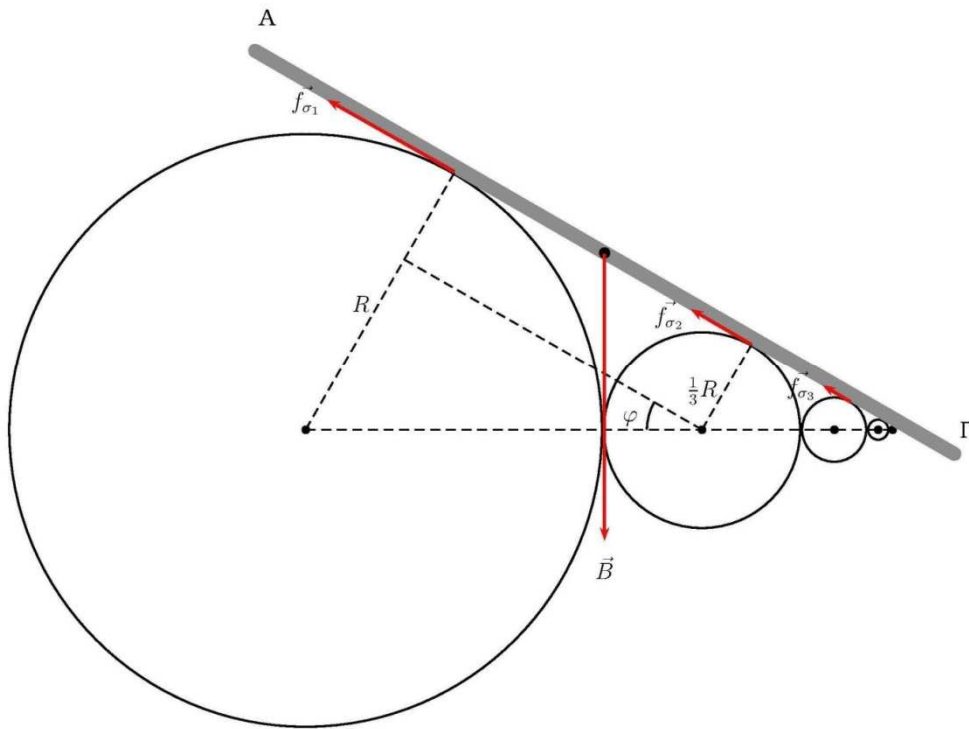
$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \frac{\alpha_1}{1 - \lambda}$$

(μονάδες 10)

Μεταξύ της ράβδου και των δίσκων υπάρχει τριβή. Σε κάθε δίσκο η τριβή προκαλεί την περιστροφή του με γωνιακή επιτάχυνση α_i . Αφού δεν υπάρχει ολίσθηση της ράβδου πάνω στους δίσκους σημαίνει ότι τα σημεία της περιφέρειας κάθε δίσκου τη στιγμή που είναι σε επαφή με τη ράβδο έχουν την ίδια γραμμική επιτάχυνση $\vec{a}$ με τη ράβδο. Για τις γωνιακές επιταχύνσεις των δίσκων θα ισχύει **(1 μον.)**

$$\alpha_i = \frac{a}{R_1} \quad (1)$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα. Δεν έχουν σχεδιαστεί οι κάθετες δυνάμεις από τους δίσκους στη ράβδο, αφού είναι κάθετες στη διεύθυνση κίνησης της ράβδου **(1 μον.)**.



Αν συμβολίσουμε με φ τη γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την οριζόντια διεύθυνση και θεωρήσουμε ότι ο άξονας x συμπίπτει με τη διεύθυνση κίνησης της ράβδου, τότε για την κίνηση της ράβδου θα ισχύει **(1 μον.)**

$$|\vec{B}| \cdot \eta \mu \varphi - (|\vec{f}_{\sigma_1}| + |\vec{f}_{\sigma_2}| + |\vec{f}_{\sigma_3}| + |\vec{f}_{\sigma_4}| + \dots) = m \cdot |\vec{a}| \quad (2)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο που έχει ως υποτείνουσα την διάκεντρο των δύο πρώτων κύκλων προκύπτει ότι **(1 μον.)**

$$\eta \mu \varphi = \frac{\frac{2}{3}R}{\frac{4}{3}R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

Αφού οι δίσκοι είναι από το ίδιο υλικό σημαίνει ότι η μάζα τους είναι ανάλογη του όγκου τους και, κατά συνέπεια, του εμβαδού τους **(1 μον.)**. Αν η μάζα του πρώτου δίσκου είναι m , τότε οι μάζες των επόμενων δίσκων θα είναι ίσες με **(1 μον.)**

$$m_2 = \frac{m_1}{9} = \frac{m}{9}, \quad m_3 = \frac{m_2}{9} = \frac{m_1}{9^2} = \frac{m}{9^2}, \dots, m_i = \frac{m}{9^{i-1}} \quad (3)$$

Για την κίνηση των δίσκων θα ισχύει **(1 μον.)**

$$\Sigma M_i = I_i \cdot \alpha_i \Rightarrow |\vec{f}_{\sigma_i}| \cdot R_i = I_i \cdot \alpha_i \Rightarrow |\vec{f}_{\sigma_1}| \cdot R_i = \frac{1}{2} m_i R_i^2 \cdot \frac{|\vec{a}|}{R_i} \Rightarrow |\vec{f}_{\sigma_1}| = \frac{1}{2} m a \cdot \frac{1}{9^{i-1}} \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας αναλυτικά στην εξίσωση (2) τις στατικές τριβές από την εξίσωση (4) θα πάρουμε **(1 μον.)**

$$|\vec{B}| \cdot \eta \mu \varphi - \frac{1}{2} m |\vec{a}| \cdot \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \dots \right) = m \cdot |\vec{a}| \quad (5)$$

Το άθροισμα στις παρενθέσεις είναι ίσο με το άθροισμα των άπειρων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με λόγο $\frac{1}{9}$ και είναι ίσο με $\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8}$ **(1 μον.)**. Αφού $|\vec{B}| = m \cdot g$ και

$\eta \mu \varphi = \frac{1}{2}$, τότε από την (5) προκύπτει ότι **(1 μον.)**

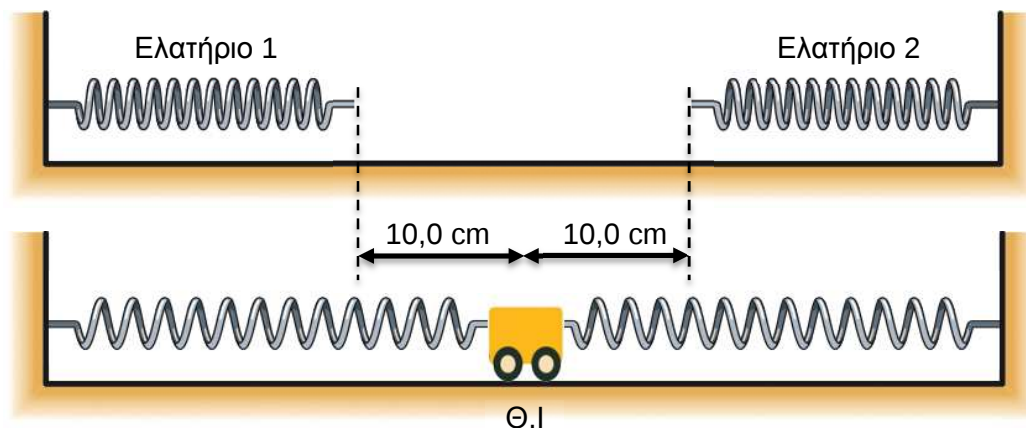
$$|\vec{a}| = \frac{8}{25} g$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Στο σχήμα που ακολουθεί (σχήμα 1) απεικονίζονται δύο **όμοια**, αβαρή και οριζόντια ελατήρια 1 και 2, με το ίδιο μήκος ισορροπίας L_0 και σταθερά ελατηρίου k .

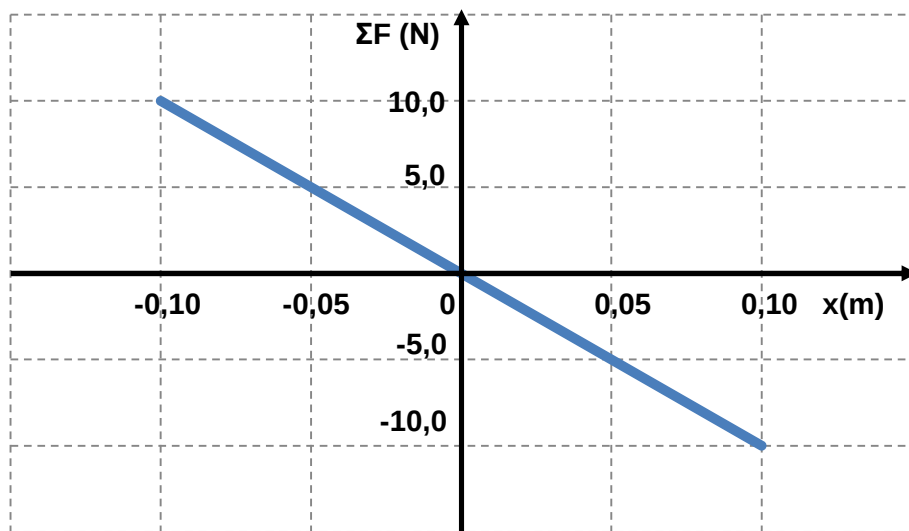
Το ένα άκρο του κάθε ελατηρίου είναι συνδεδεμένο με ακλόνητο τοίχο ενώ στο άλλο του άκρο βρίσκεται συνδεδεμένο ένα αμαξάκι μάζας $m = 0,400 \text{ kg}$ το οποίο μπορεί να κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

Όταν το αμαξάκι βρίσκεται στη θέση ισορροπίας, τα δύο ελατήρια έχουν επιμήκυνση $10,0 \text{ cm}$.



Σχήμα 1

Στο επόμενο σχήμα (σχήμα 2) φαίνεται η γραφική παράσταση της συνισταμένης δύναμης που δέχεται το αμαξάκι σε σχέση με τη θέση του, $\Sigma F = f(x)$.



Σχήμα 2

Το αμαξάκι εκτρέπεται κατά $10,0 \text{ cm}$ προς τα αριστερά από τη θέση ισορροπίας του και την χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνεται ελεύθερο. Να θεωρήσετε ότι η θετική κατεύθυνση κίνησης του αμαξιού είναι προς τα δεξιά.



α. Να εξηγήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση $\Sigma F = f(x)$, γιατί όταν το αμαξάκι αφεθεί ελεύθερο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

(μόνάδες 2)

Από τη γραφική παράσταση $\Sigma F = f(x)$ φαίνεται ότι το μέτρο της ΣF είναι ανάλογο με το μέτρο της x και έχουν αντίθετη κατεύθυνση. (1 μον.)

$$\Sigma \vec{F} = -D \cdot \vec{x} \Rightarrow A.A.T \quad (1 \text{ μον.})$$

β. Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση $\Sigma F = f(x)$ για να υπολογίσετε τη σταθερά της ταλάντωσης.

(μόνάδες 2)

$$\kappaλίση = -D \quad (1 \text{ μον.})$$

$$\Rightarrow \frac{-10,0 \text{ N} - 10,0 \text{ N}}{0,10 \text{ m} - (-0,10 \text{ m})} = -D \Rightarrow D = 100 \text{ N/m} \quad (1 \text{ μον.})$$

γ. Να υπολογίσετε τη σταθερά k των ελατηρίων.

(μόνάδες 2)

$$D = 2k \quad (1 \text{ μον.})$$

$$100 \frac{\text{N}}{\text{m}} = 2k \Rightarrow k = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (1 \text{ μον.})$$

δ. Να γράψετε την εξίσωση της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το αμαξάκι αντικαθιστώντας στη γενική της μορφή τις σταθερές τιμές.

(μόνάδες 3)

$$x_0 = 10 \text{ cm}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{100 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{0,400 \text{ Kg}}} = 15,8 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,397 \text{ s} \quad (1 \text{ μον.})$$

$$\varphi_0 = \frac{3\pi}{2} \quad (1 \text{ μον.})$$

$$x_0 = 0,1 \eta \mu(15,8 t + \frac{3\pi}{2}) \quad (1 \text{ μον.})$$

ε. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας που έχει το αμαξάκι όταν αυτό διέρχεται από θέση στην οποία η επιτάχυνση έχει μέτρο ίσο με το μισό της μέγιστης επιτάχυνσης.

(μόνάδες 3)

$$x = 5 \text{ cm} \quad (1 \text{ μον.})$$

$$|\vec{u}| = \omega \sqrt{x_0^2 - x^2}$$

$$|\vec{u}| = 15,8 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \sqrt{0,01 \text{ m}^2 - 0,0025 \text{ m}^2} \quad (1 \text{ μον.})$$

$$|\vec{u}| = 1,37 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1 \text{ μον.})$$

στ. Όταν το αμαξάκι φτάνει για πρώτη φορά σε ακραία θέση (μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$) το ελατήριο 2 κόβεται.

ι. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή στην οποία το αμαξάκι θα επανέλθει στη θέση από την οποία αφέθηκε ελεύθερο.

(μόνάδες 4)

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{0,400 \text{ kg}}} = 11,18 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow T' = 0,56 \text{ s} \quad (2 \text{ μον.})$$

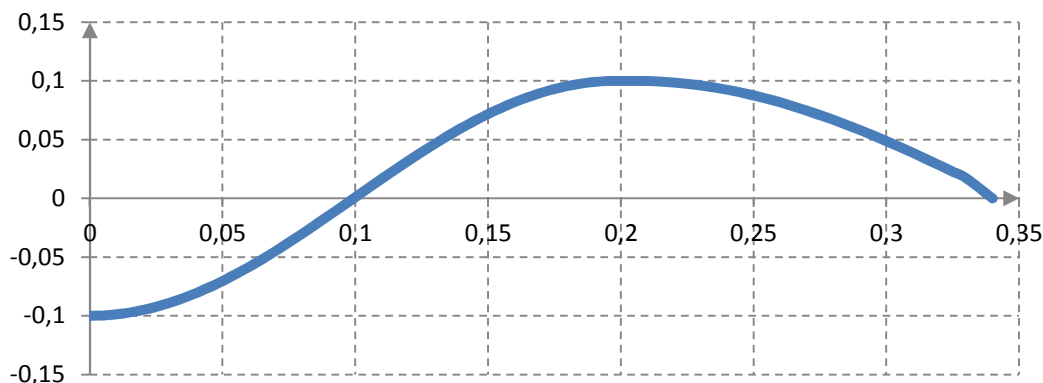
$$T = 0,40 \text{ s}$$

$$\Delta t = \frac{T}{2} + \frac{T'}{2} \quad (1 \text{ μον.})$$

$$\Delta t = 0,48 \text{ s} \quad (1 \text{ μον.})$$

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της θέσης του αμαξιού σε σχέση με τον χρόνο για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 0,34 \text{ s}$.

(μόνάδες 4)

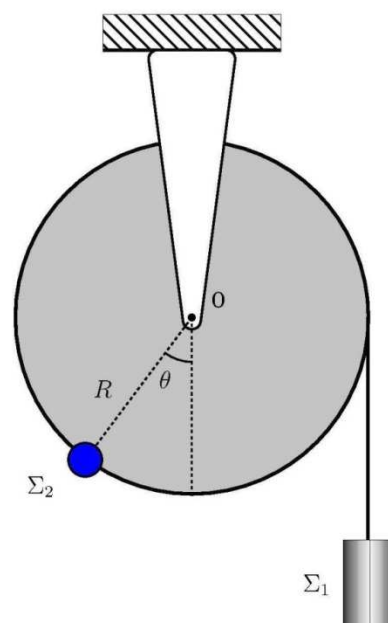


ΘΕΜΑ 5^ο

Ομογενής κυλινδρική τροχαλία μάζας m και ακτίνας R μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της O . Στην περιφέρεια της τροχαλίας είναι τυλιγμένο μη ελαστικό νήμα αμελητέας μάζας. Στο άκρο του νήματος βρίσκεται σώμα Σ_1 μάζας m_1 . Η τροχαλία ισορροπεί με τη βοήθεια σώματος Σ_2 μάζας m_2 και αμελητέων διαστάσεων, το οποίο είναι στερεωμένο στην περιφέρεια της τροχαλίας. Όταν η τροχαλία ισορροπεί, η ακτίνα θέσης του σωματιδίου σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Περιστρέφουμε την τροχαλία κατά μικρή γωνία $\Delta\theta$ και την αφήνουμε ελεύθερη.

α. Να δείξετε ότι το σώμα Σ_1 θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.



Δίνονται:

Ροπή αδράνειας κυλίνδρου: $I = \frac{1}{2} m R^2$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος και
διαφοράς δύο γωνιών:

$$\eta\mu(\alpha \pm \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta \pm \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

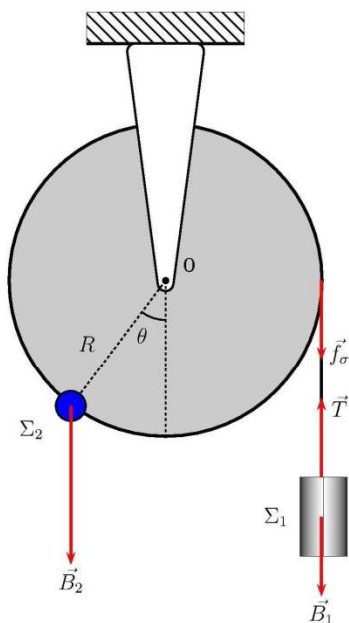
(μονάδες 16)

Όταν το σύστημα ισορροπεί η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο Σ_1 είναι ίση με μηδέν. Για την τροχαλία θα πρέπει και η συνισταμένη των ροπών να είναι ίση με μηδέν. Με τη βοήθεια του Σχήματος 5.1 οι πιο πάνω συνθήκες γράφονται ως εξής **(2 μον.)**:

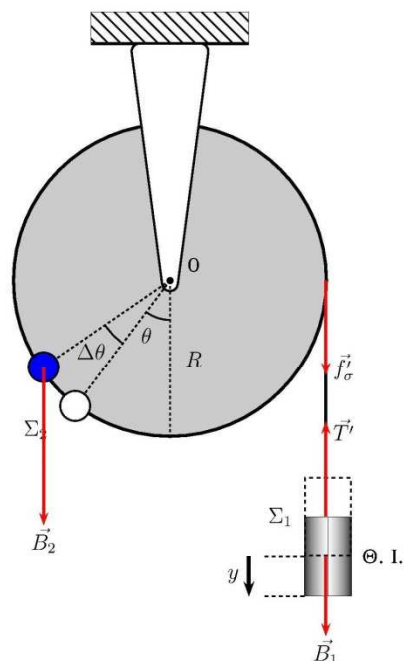
$$|\vec{B}_1| = |\vec{T}| = |\vec{f}_\sigma| \text{ και } |\vec{B}_2| \cdot R \cdot \eta\mu\theta = |\vec{f}_\sigma| \cdot R$$

Από αυτές τις σχέσεις προκύπτει ότι **(1 μον.)**

$$|\vec{B}_1| = |\vec{B}_2| \cdot \eta\mu\theta \quad (1) \quad .$$



Σχήμα 5.1: Το σύστημα στη θέση ισορροπίας



Σχήμα 5.2: Το σύστημα εκτός θέσης ισορροπίας

Αν περιστρέψουμε την τροχαλία δεξιόστροφα κατά μια μικρή γωνία $\Delta\theta$ το σώμα Σ_1 θα κατέλθει κατά $y = R \cdot \Delta\theta$ **(1 μον.)**. Αφήνοντας ελεύθερη την τροχαλία αυτή θα περιστραφεί προς τη θέση ισορροπίας της με γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ και το σώμα Σ_1 θα κινηθεί προς τα πάνω με μια επιτάχυνση $\vec{a}$. Οι δυνάμεις που προκαλούν αυτές τις κινήσεις φαίνονται στο Σχήμα 5.2.



Για την τροχαλία με το σώμα Σ_2 σε αυτήν θα ισχύει **(3 μον.)**

$$|\vec{B}_2| \cdot R \cdot \eta\mu(\theta + \Delta\theta) - |\vec{f}_\sigma'| \cdot R = I_{o\lambda} \cdot |\vec{a}| \Rightarrow$$

$$|\vec{B}_2| \cdot R \cdot (\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu(\Delta\theta) + \eta\mu(\Delta\theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\theta) - |\vec{f}_\sigma'| \cdot R = \left(\frac{1}{2}mR^2 + m_2R^2\right) \cdot \frac{|\vec{a}|}{R}$$

Για μικρές γωνίες $\Delta\theta$ θα ισχύουν: $\sigma\upsilon\nu(\Delta\theta) \approx 1$ **(1 μον.)** και $\eta\mu(\Delta\theta) \approx \Delta\theta = \frac{y}{R}$ **(1 μον.)**. Άρα η πιο πάνω σχέση θα πάρει τη μορφή **(1 μον.)**

$$|\vec{B}_2| \cdot \left(\eta\mu\theta + \frac{y}{R} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta\right) - |\vec{f}_\sigma'| = \left(\frac{1}{2}m + m_2\right) \cdot |\vec{a}| \quad (2)$$

Για το σώμα Σ_1 θα ισχύει **(1 μον.)**

$$|\vec{B}_1| - |\vec{T}| = m_1 \cdot |\vec{a}| \quad (3)$$

Επειδή $|\vec{f}_\sigma'| = |\vec{T}|$ **(1 μον.)** και λαμβάνοντας υπ' όψιν τη σχέση (1), από τις (2) και (3) προκύπτει ότι **(2 μον.)**

$$a = -\frac{2m_2 \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{R[m + 2m_2(1 + \eta\mu\theta)]} \cdot y \quad (4)$$

Δηλαδή, η επιτάχυνση του σώματος Σ_1 είναι ανάλογη της μετατόπισης του σώματος και έχει αντίθετη φορά με αυτήν **(1 μον.)**. Άρα το σώμα θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση **(1 μον.)**.

β. Να εξαγάγετε τη σχέση για την περίοδο ταλάντωσης του σώματος Σ_1 σε συνάρτηση με τα μεγέθη m, m_2, θ και g .

(μονάδες 4)

Από τη σχέση $a = -\omega^2 \cdot y$ **(1 μον.)** και τη σχέση (4) προκύπτει ότι **(1 μον.)**

$$\omega^2 = \frac{2m_2 \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{R[m + 2m_2(1 + \eta\mu\theta)]}$$

Αφού $\omega = \frac{2\pi}{T}$ **(1 μον.)** τότε θα έχουμε **(1 μον.)**

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R[m + 2m_2(1 + \eta\mu\theta)]}{2m_2 \cdot g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}}$$

ΤΕΛΟΣ ΔΟΚΙΜΙΟΥ