

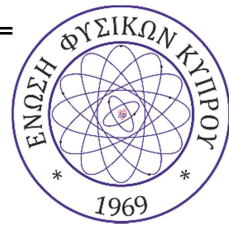
ΕΝΩΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΚΥΠΡΟΥ

31^η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (Α' Φάση)

Κυριακή, 11 Δεκεμβρίου 2016

Ώρα: 10:00 - 13:00



Οδηγίες:

- 1) Το δοκίμιο αποτελείται από πέντε (5) σελίδες και πέντε (5) θέματα.
- 2) Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα του δοκιμίου.
- 3) Κάθε θέμα βαθμολογείται με 20 μονάδες. Σε κάθε θέμα οι μονάδες κάθε ερωτήματος φαίνονται στο τέλος του ερωτήματος.
- 4) Στο τετράδιο απαντήσεων να αναγράφεται ξεκάθαρα ο αριθμός του θέματος και του ερωτήματος που απαντάτε.
- 5) Επιτρέπεται η χρήση μόνο μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- 6) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- 7) Επιτρέπεται η χρήση ΜΟΝΟ μπλε ή μαύρου μελανιού. (Οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
- 8) Τα σχήματα των θεμάτων δεν είναι υπό κλίμακα.
- 9) Δίνεται: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

ΘΕΜΑ 1^ο

(α) Η αρχή διατήρησης της ορμής ισχύει για συστήματα σωμάτων που μπορούν να θεωρηθούν απομονωμένα.

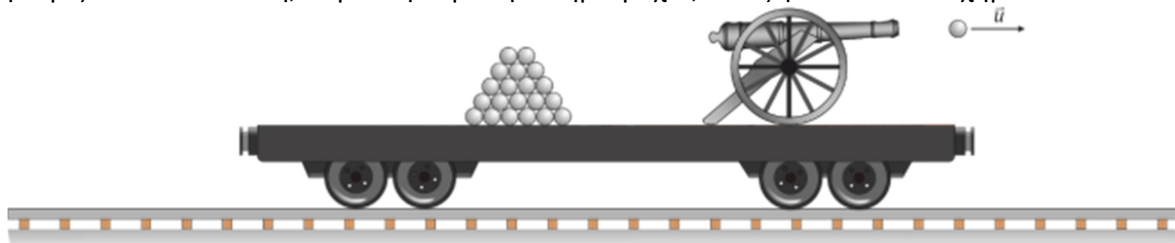
- i. Να αναφέρετε ποια συστήματα σωμάτων θεωρούνται απομονωμένα.

(μ.2)

- ii. Να διατυπώσετε την αρχή διατήρησης της ορμής.

(μ.2)

(β) Σε οριζόντια, ευθύγραμμη σιδηροτροχιά βρίσκεται μία πλατφόρμα, η οποία μπορεί να κινείται στη σιδηροτροχιά χωρίς τριβές στους άξονες. Η πλατφόρμα αρχικά είναι ακίνητη. Στην πλατφόρμα υπάρχει στερεωμένο ένα κανόνι, το οποίο μπορεί να εκτοξεύει βλήματα στην οριζόντια διεύθυνση, παράλληλα με τη σιδηροτροχιά, όπως φαίνεται στο σχήμα.



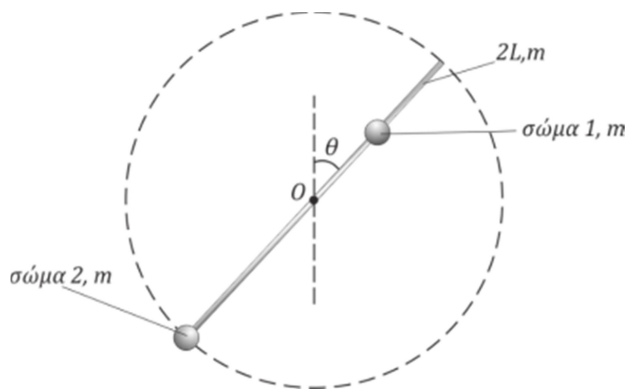


Αν το κανόνι εκτοξεύει τα βλήματα με ταχύτητα μέτρου u ως προς την πλατφόρμα και αν η αρχική μάζα του συστήματος πλατφόρμα – κανόνι – βλήματα είναι m_0 και η μάζα κάθε βλήματος είναι m_β , να υπολογίσετε την ταχύτητα της πλατφόρμας μετά από την εκτόξευση από το κανόνι N βλημάτων προς την ίδια κατεύθυνση. Θεωρήστε ότι υπάρχουν αρκετά βλήματα στην πλατφόρμα. Η απάντηση να δοθεί ως συνάρτηση των μεγεθών m_0, m_β, u και N . (μ.9)

- (γ) Στο ένα άκρο ακίνητης βάρκας μήκους $l = 4\text{m}$ στέκεται ένας άνθρωπος, ο οποίος κρατάει σε ύψος $h = 1,5\text{m}$ μια σφαίρα μάζας $m = 2\text{kg}$. Η μάζα της βάρκας με τον άνθρωπο είναι $M = 200\text{kg}$. Ο άνθρωπος ρίχνει τη σφαίρα οριζόντια προς το άλλο άκρο της βάρκας. Να υπολογίσετε με ποια ταχύτητα θα πρέπει ο άνθρωπος να ρίξει την σφαίρα, έτσι ώστε αυτή να κτυπήσει στο άλλο άκρο της βάρκας; Η αντίσταση του νερού στην κίνηση της βάρκας είναι αμελητέα. (μ.7)

ΘΕΜΑ 2^ο

Μία ομογενής ράβδος μήκους $2L$ και μάζας m μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα O , ο οποίος περνά από το κέντρο της. Στη ράβδο είναι στερεωμένα δύο μικρά σώματα μάζας m το καθένα. Το σώμα 1 είναι στερεωμένο στο μέσο της απόστασης από το κέντρο μέχρι το δεξιό άκρο της ράβδου ενώ το σώμα 2 είναι στερεωμένο στο αριστερό άκρο της ράβδου. Η ράβδος αρχικά συγκρατείται ακίνητη σχηματίζοντας γωνία θ με τον κατακόρυφο άξονα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



- (α) Να αναφέρετε ποια είναι η φυσική σημασία της ροπής αδράνειας. (μ.2)
- (β) Να εξηγήσετε αν το σύστημα της ράβδου και των μαζών θα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, όταν αφεθεί. (μ.3)
- (γ) Αν η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο O είναι $I_p = \frac{ML^2}{3}$, να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος της ράβδου και των δύο σωμάτων ως προς το κέντρο O . (μ.3)
- (δ) Να δείξετε ότι τη στιγμή που το σύστημα αφήνεται, η αρχική μηχανική του ενέργεια ισούται με $mgL(1 + \frac{\sin\theta}{2})$. (μ.3)



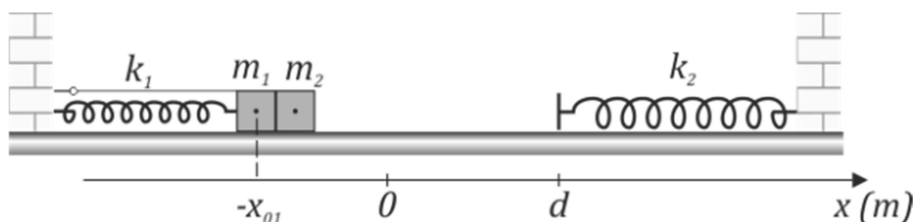
(ε) ~~Όταν το σύστημα αφεθεί, θα περιστραφεί δεξιόστροφα. Αν $L = \frac{6}{17} \text{ m}$ τότε, τη στιγμή που το σώμα 2 βρίσκεται στο ανώτατο σημείο της τροχιάς του:~~

~~ε.i Να αποδείξετε ότι η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος, ισούται με $\omega = \sqrt{g(1 + \sin\theta)}$.~~
~~(μ.4)~~

~~ε.ii Να χαράξετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση του τετραγώνου της γωνιακής ταχύτητας συναρτήσει της γωνίας θ , $\omega^2 = f(\theta)$ για γωνία θ από 0 μέχρι π ακτίνα ($0 \leq \theta \leq \pi$).~~
~~(μ.5)~~

ΘΕΜΑ 3^ο

Αν το ελατήριο σταθεράς k_1 βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, το σώμα μάζας m_1 , που είναι στερεωμένο σε αυτό, βρίσκεται στη θέση $x=0\text{m}$ του άξονα x . Συσπειρώνουμε το ελατήριο σταθεράς k_1 , με τη βοήθεια νήματος, κατά x_{01} και τοποθετούμε δίπλα από το σώμα μάζας m_1 ένα σώμα μάζας m_2 . Όταν κοπεί το νήμα, το σύστημα αρχίζει να ταλαντώνεται. Οι τριβές με το οριζόντιο επίπεδο θεωρούνται αμελητέες και τα σώματα θεωρούνται ως υλικά σημεία.



Αν $x_{01}=0,5\text{m}$, $k_1=8\pi^2 \text{ N/m}$, $k_2=6\pi^2 \text{ N/m}$, $m_1=0,5\text{kg}$ και $m_2=1,5\text{kg}$:

(α) Όταν ο ταλαντωτής περνά από τη θέση ισορροπίας του, το σώμα μάζας m_2 θα χάσει την επαφή του με το σώμα μάζας m_1 . Ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό και τι ταχύτητα θα έχει το σώμα μάζας m_2 ;
 (μ.4)

(β) Μετά τη χρονική στιγμή που χάνεται η επαφή μεταξύ των σωμάτων και τη στιγμή που το σώμα μάζας m_1 περνά από τη θέση ισορροπίας του ($x=0\text{m}$), το σώμα μάζας m_2 προσκολλάται σε αβαρές ελατήριο σταθεράς k_2 και αρχίζει να ταλαντώνεται.

β.i Να δείξετε ότι το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος μάζας m_2 είναι διπλάσιο το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος μάζας m_1 ($x_{02}=2x_{01}$).
 (μ.3)

β.ii Να υπολογίσετε την απόσταση d μεταξύ των θέσεων ισορροπίας των δύο ταλαντωτών.
 (μ.2)

β.iii Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο ταλαντώσεων.
 (μ.4)



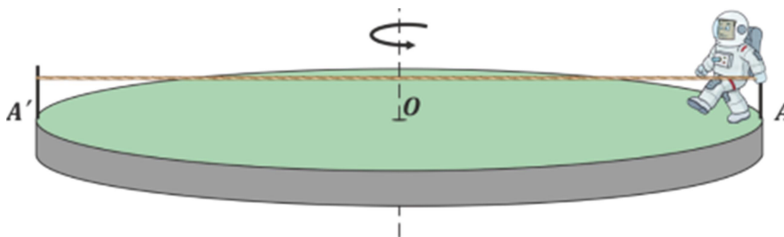
(γ) Με αρχική χρονική στιγμή αυτήν που προσδιορίζεται στο ερώτημα (β) και με σημείο αναφοράς τη θέση ισορροπίας του πρώτου ταλαντωτή ($x=0$ m):

γ.i Να χαράξετε σε κοινό διάγραμμα, με βαθμολογημένους άξονες, τις γραφικές παραστάσεις των θέσεων των δύο ταλαντωτών συναρτήσει του χρόνου για χρονικό διάστημα 1 s. (μ.5)

γ.ii Από τη γραφική παράσταση να προσδιορίσετε, προσεγγιστικά, τη χρονική στιγμή που τα δύο σώματα θα απέχουν μεταξύ τους την ελάχιστη απόσταση. (μ.2)

ΘΕΜΑ 4^ο

Μια διαστημική πλατφόρμα, με σχήμα κυκλικού δίσκου ακτίνας $R=100$ m και μάζας $M=10$ tn, περιστρέφεται ελεύθερα στο διάστημα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_0=0,313$ rad/s, γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδο περιστροφής της, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ένας αστροναύτης βρίσκεται αρχικά ακίνητος ως προς την εξέδρα, στο σημείο A της περιφέρειάς της. Η μάζα του αστροναύτη μαζί με τον εξοπλισμό και τη στολή του είναι $m=100$ kg και μπορεί να θεωρηθεί ως υλικό σημείο. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ s ο αστροναύτης με τη βοήθεια συρματόσχοινου και ειδικών παπουτσιών αρχίζει να βαδίζει με σταθερή, ως προς την πλατφόρμα, ταχύτητα πάνω στη διάμετρο AOA' και στο σημείο A' σταματά.

[Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας κυκλικού δίσκου είναι $I_\delta = \frac{1}{2}MR^2$]

(α) Με σημείο αναφοράς το κέντρο O της πλατφόρμας, να εξαγάγετε μία σχέση για τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος συναρτήσει της απόστασης x του αστροναύτη από το κέντρο της, $\omega = f(x)$, για τη διαδρομή AOA'. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (μ.5)

(β) Αν το μέτρο της ταχύτητας, με την οποία κινείται ο αστροναύτης στη διαδρομή AOA' (ακτινική ταχύτητα, v_k) είναι $v_k=1,58$ m/s να υπολογίσετε σε ποια χρονική στιγμή το μέτρο της γραμμικής του ταχύτητας, λόγω της περιστροφής του, (επιτρόχια ταχύτητα, v_ϵ) είναι είκοσι φορές μεγαλύτερο από το μέτρο της ακτινικής του ταχύτητας, $v_\epsilon=20v_k$. (μ.5)

(γ) Να αποδείξετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του αστροναύτη από το σημείο A στο σημείο A', το κέντρο O της εξέδρας μετατοπίζεται και να υπολογίσετε τη θέση του σημείου O τη στιγμή που ο αστροναύτης φθάνει στο σημείο A'. (μ.4)

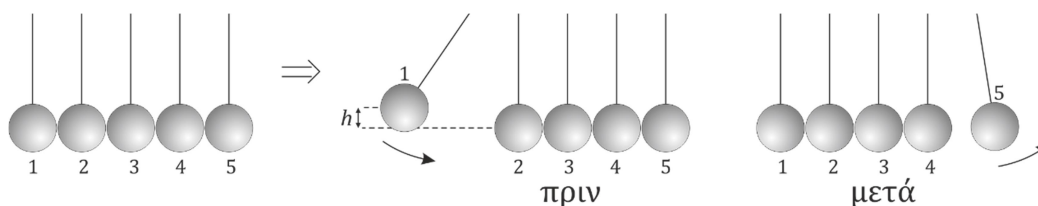
(δ) Να εξηγήσετε πόσα και ποια είδη κινήσεων εκτελεί ο αστροναύτης κατά την μετακίνησή του από το σημείο A στο σημείο O, ως προς έναν ακίνητο παρατηρητή. (μ.6)



ΘΕΜΑ 5^ο

Η διάταξη των σφαιρών του Νεύτωνα αποτελείται από πέντε εντελώς ελαστικές σφαίρες ίδιας μάζας m και ίδιας ακτίνας R , οι οποίες βρίσκονται πολύ κοντά η μία στην άλλη, χωρίς να ακουμπούν μεταξύ τους. Όταν εκτρέψουμε μία σφαίρα στη μία πλευρά της διάταξης και την αφήσουμε ελεύθερη, αυτή συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με την πρώτη από τις υπόλοιπες τέσσερις σφαίρες, με ταχύτητα v_i και από την άλλη πλευρά της διάταξης εκτοξεύεται η τελευταία σφαίρα.

Όταν εκτρέψουμε ταυτόχρονα δύο σφαίρες από τη μια πλευρά, παρατηρούμε ότι εκτοξεύονται δύο σφαίρες από την άλλη πλευρά.



(α) Να αναφέρετε ποιοι νόμοι διατήρησης ισχύουν κατά την ελαστική κρούση.

(μ.2)

(β) Να αποδείξετε ότι δύο σώματα ίσης μάζας ανταλλάζουν ταχύτητες, όταν συγκρουστούν κεντρικά και εντελώς ελαστικά.

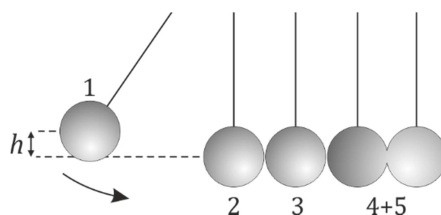
(μ.6)

(γ) Αν εκτρέψουμε τη σφαίρα 1 έτσι ώστε να αποκτήσει αρχικό ύψος h και στη συνέχεια την αφήσουμε ελεύθερη, να υπολογίσετε συναρτήσει των m , R και v_i το ύψος h' στο οποίο θα φθάσει και την ταχύτητα v' με την οποία θα εκτοξευθεί η σφαίρα 5.

(μ.6)

(δ) Αν οι σφαίρες 4 και 5 είναι κολλημένες μεταξύ τους, να υπολογίσετε την ταχύτητα v_Σ με την οποία θα εκτοξευθεί το συσσωμάτωμα (σφαίρες 4 και 5) και το ύψος h_Σ στο οποίο θα φθάσει, αν η σφαίρα 1 αφεθεί ελεύθερη από ύψος h .

(μ.6)



ΤΕΛΟΣ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

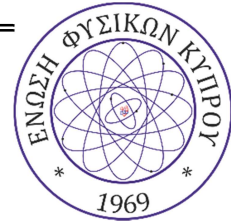
ΕΝΩΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΚΥΠΡΟΥ

31^Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (Α' Φάση)

Κυριακή, 11 Δεκεμβρίου 2016

Ώρα: 10:00 - 13:00



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

(α) Η αρχή διατήρησης της ορμής ισχύει για συστήματα σωμάτων που μπορούν να θεωρηθούν απομονωμένα.

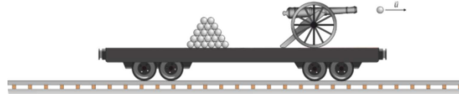
i. Να αναφέρετε ποια συστήματα σωμάτων θεωρούνται απομονωμένα. (μ.2)

Απομονωμένα θεωρούνται τα συστήματα, στα οποία η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα είναι ίση με μηδέν, $\vec{\Sigma F} = 0$.

ii. Να διατυπώσετε την αρχή διατήρησης της ορμής. (μ.2)

Σε κάθε απομονωμένο σύστημα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή

(β) Σε οριζόντια, ευθύγραμμη σιδηροτροχιά βρίσκεται μία πλατφόρμα, η οποία μπορεί να κινείται στη σιδηροτροχιά χωρίς τριβές στους άξονες. Η πλατφόρμα αρχικά είναι ακίνητη. Στην πλατφόρμα υπάρχει στερεωμένο ένα κανόνι, το οποίο μπορεί να εκτοξεύει βλήματα στην οριζόντια διεύθυνση, παράλληλα με τη σιδηροτροχιά, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Αν το κανόνι εκτοξεύει τα βλήματα με ταχύτητα μέτρου u ως προς την πλατφόρμα και αν η αρχική μάζα του συστήματος πλατφόρμα – κανόνι – βλήματα είναι m_0 και η μάζα κάθε βλήματος είναι m_β , να υπολογίσετε την ταχύτητα της πλατφόρμας μετά από την εκτόξευση από το κανόνι N βλημάτων προς την ίδια κατεύθυνση. Θεωρήστε ότι υπάρχουν αρκετά βλήματα στην πλατφόρμα. Η απάντηση να δοθεί ως συνάρτηση των μεγεθών m_0 , m_β , u και N . (μ.9)

Συμβολίζουμε με $v_1, v_2, \dots$, την ταχύτητα της πλατφόρμας μετά την 1^η, 2^η, ..., εκτόξευση βλήματος από την πλατφόρμα. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ορμής

$$(m_0 - m_\beta)v_1 - m_\beta \cdot v_\beta = 0 \quad (1)$$

όπου v_β είναι η ταχύτητα του βλήματος ως προς τον ακίνητο παρατηρητή. Η σχετική ταχύτητα του βλήματος ως προς την πλατφόρμα, u , είναι ίση με $u = v_\beta + v_1$

Άρα, αντικαθιστώντας στη σχέση (1) την v_β βρίσκουμε ότι

$$v_1 = \frac{m_\beta}{m_0} u \quad (2)$$



Εξετάζοντας την εκτόξευση του δεύτερου βλήματος σε σύστημα αναφοράς που κινείται με ταχύτητα v_1 μπορούμε να δούμε ότι σε αυτό το σύστημα η ταχύτητα της πλατφόρμας (που τώρα έχει μάζα $m_0 - m_\beta$) πριν την εκτόξευση είναι 0 και η ταχύτητά της μετά την εκτόξευση είναι $v_2 - v_1$

Άρα, στο σύστημα αυτό θα έχουμε

$$v_2 - v_1 = \frac{m_\beta}{m_0 - m_\beta} u$$

και, άρα,

$$v_2 = \left(\frac{m_\beta}{m_0} + \frac{m_\beta}{m_0 - m_\beta} \right) u$$

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία και για τις υπόλοιπες εκτοξεύσεις καταλήγουμε στη ζητούμενη σχέση για την ταχύτητα της πλατφόρμας μετά την εκτόξευση N βλημάτων:

$$v_N = \left(\frac{m_\beta}{m_0} + \frac{m_\beta}{m_0 - m_\beta} + \dots + \frac{m_\beta}{m_0 - (N-1)m_\beta} \right) u$$

- (γ) Στο ένα άκρο ακίνητης βάρκας μήκους $l = 4\text{m}$ στέκεται ένας άνθρωπος, ο οποίος κρατάει σε ύψος $h = 1,5\text{m}$ μια σφαίρα μάζας $m = 2\text{kg}$. Η μάζα της βάρκας με τον άνθρωπο είναι $M = 200\text{kg}$. Ο άνθρωπος ρίχνει τη σφαίρα οριζόντια προς το άλλο άκρο της βάρκας. Να υπολογίσετε με ποια ταχύτητα θα πρέπει ο άνθρωπος να ρίξει την σφαίρα, έτσι ώστε αυτή να κτυπήσει στο άλλο άκρο της βάρκας; Η αντίσταση του νερού στην κίνηση της βάρκας είναι αμελητέα. (μ.7)

Από την αρχή διατήρησης της ορμής προκύπτει ότι $M \cdot u - m \cdot v = 0$

όπου u είναι η ταχύτητα της βάρκας με τον άνθρωπο μετά το ρίξιμο της σφαίρας και v η ταχύτητα της σφαίρας. Η σχετική ταχύτητα της σφαίρας ως προς τη βάρκα είναι:

$$v_{σχ} = u + v = \left(1 + \frac{m}{M} \right) v$$

Ο χρόνος πτώσης της σφαίρας από το ύψος h είναι ίσος με: $t_{\pi\tau} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Για να κτυπήσει στο άλλο άκρο της βάρκας η σφαίρα θα πρέπει η μετατόπισή της ως προς τη βάρκα για το χρονικό διάστημα $t_{\pi\tau}$ να είναι ίση με το μήκος της βάρκας

Δηλαδή:

$$\Delta x_{σχ} = l \Rightarrow v_{σχ} \cdot t_{\pi\tau} = l \Rightarrow \left(1 + \frac{m}{M} \right) v \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = l$$

Από αυτή τη σχέση προκύπτει ότι:

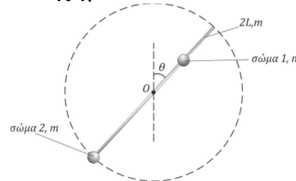
$$v = \frac{l}{\left(1 + \frac{m}{M} \right) \cdot \sqrt{2h/g}}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές για l, m, M, h και g βρίσκουμε ότι: $v = 7,16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$



ΘΕΜΑ 2^ο

Μία ομογενής ράβδος μήκους $2L$ και μάζας m μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα O , ο οποίος περνά από το κέντρο της. Στη ράβδο είναι στερεωμένα δύο μικρά σώματα μάζας m το καθένα. Το σώμα 1 είναι στερεωμένο στο μέσο της απόστασης από το κέντρο μέχρι το δεξιό άκρο της ράβδου ενώ το σώμα 2 είναι στερεωμένο στο αριστερό άκρο της ράβδου. Η ράβδος αρχικά συγκρατείται ακίνητη σχηματίζοντας γωνία θ με τον κατακόρυφο άξονα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



(α) Να αναφέρετε ποια είναι η φυσική σημασία της ροπής αδράνειας. (μ.2)

Η ροπή αδράνειας είναι το μέτρο της αδράνειας στην περιστροφική κίνηση. Εκφράζει τη δυσκολία με την οποία μπορεί να περιστραφεί ένα σώμα.

(β) Να εξηγήσετε αν το σύστημα της ράβδου και των μαζών θα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, όταν αφεθεί. (μ.3)

Το σύστημα ράβδου-μαζών δεν περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα διότι ασκείται σε αυτό εξωτερική δύναμη (το βάρος των σωμάτων) η οποία προκαλεί ροπή, η οποία μεταβάλλει την γωνιακή ταχύτητα του συστήματος.

(γ) Αν η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο O είναι $I_p = \frac{ML^2}{3}$, να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος της ράβδου και των δύο σωμάτων ως προς το κέντρο O . (μ.3)

$$I_{\text{συστ}} = I_p + I_1 + I_2$$

$$I_{\text{συστ}} = \frac{mL^2}{3} + mL^2 + \frac{mL^2}{4} \Rightarrow I_{\text{συστ}} = \frac{19}{12}mL^2$$

(δ) Να δείξετε ότι τη στιγμή που το σύστημα αφήνεται, η αρχική μηχανική του ενέργεια ισούται με $mgL(1 + \frac{\sin\theta}{2})$. (μ.3)

$$E_{\mu\eta\chi}^{\alpha\rho\chi} = E_{\Delta,1} + E_{\Delta,2} = mgh_1 + mgh_2 + mgh$$

Με σημείο αναφοράς το χαμηλότερο σημείο του κύκλου:

$$h_2 = L(1 - \sin\theta), h_1 = L(1 + \frac{\sin\theta}{2}), h = L$$

$$E_{\mu\eta\chi}^{\alpha\rho\chi} = mgL \left[(1 - \sin\theta) + \left(1 + \frac{\sin\theta}{2}\right) + 1 \right] \Rightarrow E_{\mu\eta\chi}^{\alpha\rho\chi} = mg \left(3 - \frac{\sin\theta}{2} \right)$$

Με σημείο αναφοράς το σώμα 2:

$$h_2 = 0, h_1 = \frac{3}{2}L\sin\theta = \frac{3}{2}L\sin\theta, h = L\sin\theta \text{ τότε, } E_{\mu\eta\chi}^{\alpha\rho\chi} = \frac{5}{2}mgL\sin\theta$$

Με σημείο αναφοράς το κέντρο της ράβδου:

$$h_2 = -L\sin\theta, h_1 = \frac{L}{2}\sin\theta, h = 0 \text{ τότε, } E_{\mu\eta\chi}^{\alpha\rho\chi} = -\frac{1}{2}mgL\sin\theta$$

Με σημείο αναφοράς το σώμα 1:

$$h_1 = 0, h_2 = -\frac{3}{2}L\sin\theta, h = -\frac{1}{2}L\sin\theta \text{ τότε, } E_{\mu\eta\chi}^{\alpha\rho\chi} = -2mgL\sin\theta$$



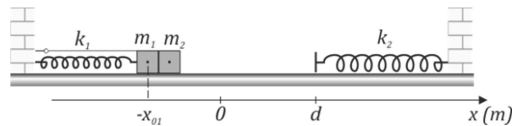
(ε) Όταν το σύστημα αφεθεί, θα περιστραφεί δεξιόστροφα. Αν $L = \frac{6}{17} \text{ m}$ τότε, τη στιγμή που το σώμα 2 βρίσκεται στο ανώτατο σημείο της τροχιάς του:

ε.ι Να αποδείξετε ότι η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος, ισούται με $\omega = \sqrt{g(1 + \sin\theta)}$. (μ.4)

ε.ii Να χαράξετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση του τετραγώνου της γωνιακής ταχύτητας συναρτήσει της γωνίας θ , $\omega^2 = f(\theta)$ για γωνία θ από 0 μέχρι π ακτίνια ($0 \leq \theta \leq \pi$). (μ.5)

ΘΕΜΑ 3^ο

Αν το ελατήριο σταθεράς k_1 βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, το σώμα μάζας m_1 , που είναι στερεωμένο σε αυτό, βρίσκεται στη θέση $x=0\text{m}$ του άξονα x . Συσπειρώνουμε το ελατήριο σταθεράς k_1 , με τη βοήθεια νήματος, κατά x_{01} και τοποθετούμε δίπλα από το σώμα μάζας m_1 ένα σώμα μάζας m_2 . Όταν κοπεί το νήμα, το σύστημα αρχίζει να ταλαντώνεται. Οι τριβές με το οριζόντιο επίπεδο θεωρούνται αμελητέες και τα σώματα θεωρούνται ως υλικά σημεία.



Αν $x_{01}=0,5\text{m}$, $k_1=8\pi^2 \text{ N/m}$, $k_2=6\pi^2 \text{ N/m}$, $m_1=0,5\text{kg}$ και $m_2=1,5\text{kg}$:

(α) Όταν ο ταλαντωτής περνά από τη θέση ισορροπίας του, το σώμα μάζας m_2 θα χάσει την επαφή του με το σώμα μάζας m_1 . Ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό και τι ταχύτητα θα έχει το σώμα μάζας m_2 ; (μ.4)

Η χρονική στιγμή που το σώμα 2 χάνει την επαφή του με το σώμα 1 αντιστοιχεί στο $\frac{1}{4}$ της περιόδου.

$$t = \frac{T}{4} \text{ με } T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1+m_2}{k_1}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{8\pi^2}} \Rightarrow T = 1 \text{ (s)}. \text{ Άρα } t = 0,25 \text{ s}$$

Τη στιγμή που ο ταλαντωτής περνά από τη θέση ισορροπίας του ($x = 0 \text{ m}$) όλη η δυναμική του ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική.

$$\frac{1}{2} k_1 x_o^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \Rightarrow \pi^2 = v^2 \Rightarrow v = \pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(β) Μετά τη χρονική στιγμή που χάνεται η επαφή μεταξύ των σωμάτων και τη στιγμή που το σώμα μάζας m_1 περνά από τη θέση ισορροπίας του ($x=0\text{m}$), το σώμα μάζας m_2 προσκολλάται σε αβαρές ελατήριο σταθεράς k_2 και αρχίζει να ταλαντώνεται.

β.ι Να δείξετε ότι το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος μάζας m_2 είναι διπλάσιο το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος μάζας m_1 ($x_{02}=2x_{01}$). (μ.3)

Το σώμα 1 από τη στιγμή που χάνει την επαφή του με το σώμα 2 και μέχρι να περάσει ξανά από τη θέση ισορροπίας του, εκτελεί μισή ταλάντωση. Η ταλάντωση του σώματος 1 έχει διαφορετικό πλάτος και διαφορετική περίοδο από την αρχική ταλάντωση διότι χάνεται ενέργεια και μάζα από το σύστημα.

Πλάτος ταλαντωτή 2:

$$\frac{1}{2} m_2 v^2 = \frac{1}{2} k_2 x_{o2}^2 \Rightarrow \frac{3}{4} \pi^2 = 3\pi^2 x_{o2}^2 \Rightarrow x_{o2}^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_{o2} = 0,5 \text{ m}$$

Πλάτος ταλαντωτή 1:

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} k_1 x_{o1}^2 \Rightarrow \frac{1}{4} \pi^2 = 4\pi^2 x_{o1}^2 \Rightarrow x_{o1}^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow x_{o1} = 0,25 \text{ m}$$

$$\text{Άρα } x_{o2} = 2x_{o1}$$



β.ii Να υπολογίσετε την απόσταση d μεταξύ των θέσεων ισορροπίας των δύο ταλαντωτών.
(μ.2)

Η απόσταση d ισούται με $v\Delta t$, όπου $\Delta t = \frac{T_1}{2}$

Περίοδος ταλαντωτή 1:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} \Rightarrow T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 8\pi^2}} \Rightarrow T_1 = 0,5 \text{ s}$$

Άρα η απόσταση d ισούται: $d = v \cdot \frac{T_1}{2} \Rightarrow d = \pi \cdot 0,25 \Rightarrow d = 0,785 \text{ m}$

β.iii Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο ταλαντώσεων. (μ.4)

Περίοδος ταλαντωτή 2:

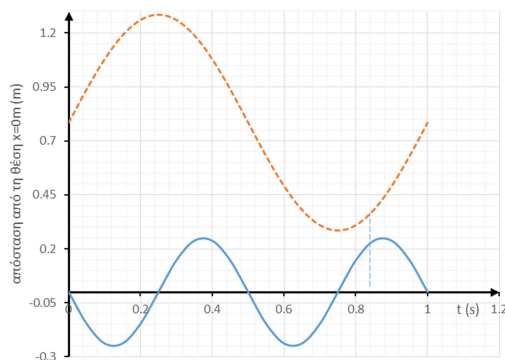
$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k_2}} \Rightarrow T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{3}{2 \cdot 6\pi^2}} \Rightarrow T_2 = 1 \text{ s}$$

Τη στιγμή που ο ταλαντωτής 2 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του με ταχύτητα προς τα δεξιά, ο ταλαντωτής 1 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του με ταχύτητα προς τ' αριστερά. Συνεπώς, οι εξισώσεις των δύο ταλαντώσεων είναι:

$$x_1 = -0,25\eta\mu(4\pi t) \text{ και } x_2 = 0,5\eta\mu(2\pi t)$$

(γ) Με αρχική χρονική στιγμή αυτήν που προσδιορίζεται στο ερώτημα (β) και με σημείο αναφοράς τη θέση ισορροπίας του πρώτου ταλαντωτή ($x = 0 \text{ m}$):

γ.i Να χαράξετε σε κοινό διάγραμμα, με βαθμολογημένους άξονες, τις γραφικές παραστάσεις των θέσεων των δύο ταλαντωτών συναρτήσει του χρόνου για χρονικό διάστημα 1 s. (μ.5)



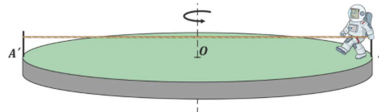
γ.ii Από τη γραφική παράσταση να προσδιορίσετε, προσεγγιστικά, τη χρονική στιγμή που τα δύο σώματα θα απέχουν μεταξύ τους την ελάχιστη απόσταση. (μ.2)

Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι τα δύο σώματα απέχουν μεταξύ τους την ελάχιστη απόσταση, προσεγγιστικά, τη χρονική στιγμή $t = 0,84 \text{ s}$



ΘΕΜΑ 4^ο

Μια διαστημική πλατφόρμα, με σχήμα κυκλικού δίσκου ακτίνας $R = 100 \text{ m}$ και μάζας $M = 10 \text{ tn}$, περιστρέφεται ελεύθερα στο διάστημα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 0,313 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδο περιστροφής της, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ένας αστροναύτης βρίσκεται αρχικά ακίνητος ως προς την εξέδρα, στο σημείο A της περιφέρειάς της. Η μάζα του αστροναύτη μαζί με τον εξοπλισμό και τη στολή του είναι $m = 100 \text{ kg}$ και μπορεί να θεωρηθεί ως υλικό σημείο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ ο αστροναύτης με τη βοήθεια συρματοσχοινού και ειδικών παπουτσιών αρχίζει να βαδίζει με σταθερή, ως προς την πλατφόρμα, ταχύτητα πάνω στη διάμετρο AOA' και στο σημείο A' σταματά.

[Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας κυκλικού δίσκου είναι $I_\delta = \frac{1}{2}MR^2$]

- (α) Με σημείο αναφοράς το κέντρο O της πλατφόρμας, να εξαγάγετε μία σχέση για τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος συναρτήσει της απόστασης x του αστροναύτη από το κέντρο της, $\omega = f(x)$, για τη διαδρομή AOA' . Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (μ.5)

Η στροφορμή του συστήματος εξέδρα - αστροναύτης διατηρείται σταθερή, καθ' όλη τη μετακίνηση του αστροναύτη από το $A \rightarrow O \rightarrow A'$, γιατί δεν υπάρχουν ροπές από εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα

$$(\Sigma \vec{M}_{\varepsilon\xi} = 0)$$

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda}$$

$$H L_{\alpha\rho\chi} = (I_{\varepsilon\xi} + mR^2)\omega_0 \Rightarrow L_{\alpha\rho\chi} = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_0$$

$$\Rightarrow L_{\alpha\rho\chi} = \left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2\omega_0 \Rightarrow L_{\alpha\rho\chi} = \left(\frac{1}{2}10^4 + 10^2\right)10^4 \cdot 0,313 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$L_{\alpha\rho\chi} = 15963000 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}}$$

Θεωρώντας αρχή των αξόνων το κέντρο O της εξέδρας και x η θέση του αστροναύτη ως προς το κέντρο της εξέδρας τότε:

$$L_{\tau\varepsilon\lambda} = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mx^2\right)\omega, \text{ οπότε } L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow 15963 \cdot 10^3 = \left(\frac{1}{2}10^410^4 + 10^2x^2\right) \cdot \omega \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{15963 \cdot 10^3}{(5 \cdot 10^7 + 10^2x^2)} \Rightarrow \omega = \frac{159630}{(5 \cdot 10^5 + x^2)} \text{ στο SI}$$

- (β) Αν το μέτρο της ταχύτητας, με την οποία κινείται ο αστροναύτης στη διαδρομή AOA' (ακτινική ταχύτητα, v_k) είναι $v_k = 1,58 \text{ m/s}$ να υπολογίσετε σε ποια χρονική στιγμή το μέτρο της γραμμικής του ταχύτητας, λόγω της περιστροφής του, (επιτροχία ταχύτητα, v_ε) είναι είκοσι φορές μεγαλύτερο από το μέτρο της ακτινικής του ταχύτητας, $v_\varepsilon = 20v_k$. (μ.5)

$$\text{Αν } v_\varepsilon = 20v_k \text{ τότε } \omega \cdot x = 20 \cdot 1,58 \Rightarrow \frac{159630}{(5 \cdot 10^5 + x^2)}x = 31,6 \Rightarrow 159630x = 158 \cdot 10^5 + 31,6x^2$$

$$\Delta = 2,348 \cdot 10^{10} \quad \text{Λύσεις δευτεροβάθμιας: } x_1 = 4950 \text{ m και } x_2 = 101 \text{ m}$$



Η επιτόχια ταχύτητα δεν θα γίνει ποτέ ίση με 20 φορές την ακτινική και ο αστροναύτης να είναι πάνω στην πλατφόρμα. Για να συμβεί αυτό, ο αστροναύτης πρέπει να βγει έξω από την πλατφόρμα, όμως αυτός, στο σημείο Α' σταματά.

- (γ) Να αποδείξετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του αστροναύτη από το σημείο Α στο σημείο Α', το κέντρο Ο της εξέδρας μετατοπίζεται και να υπολογίσετε τη θέση του σημείου Ο τη στιγμή που ο αστροναύτης φθάνει στο σημείο Α'.

(μ.4)

$$Mx = m(R - x) \Rightarrow x = \frac{mR}{(M+m)} \Rightarrow x = \frac{10^4}{(1^4 + 10^2)} = \frac{100}{101} m \Rightarrow x \approx 0,99 m$$

Το σύστημα εξέδρα – αστροναύτης είναι απομονωμένο άρα $\Delta \vec{p} = 0$. Εφόσον ο αστροναύτης αποκτά ορμή πλησιάζοντας το κέντρο του δίσκου τότε και ο δίσκος πρέπει να αποκτήσει ίση και αντίθετη ορμή πλησιάζοντας τον αστροναύτη. Η θέση όμως του κέντρου μάζας όμως μένει σταθερή άρα όταν ο αστροναύτης φτάσει στο Ο, το Ο βρίσκεται στο κέντρο μάζας δηλαδή 0,99 m από την αρχική του θέση το 0,99 m είναι η σχετική μετατόπιση του ως προς το δίσκο. Οπότε όταν ο αστροναύτης θα φθάσει στο αντιδιαμετρικό σημείο Α' το κέντρο Ο της εξέδρας θα μετακινηθεί επιπλέον 0,99 m ώστε το Κέντρο Μάζας να παραμείνει ακίνητο.

Η τελική θέση του κέντρου Ο της εξέδρας είναι $x = 1,98 m$ ως προς την αρχική του θέση.

- (δ) Να εξηγήσετε πόσα και ποια είδη κινήσεων εκτελεί ο αστροναύτης κατά την μετακίνησή του από το σημείο Α στο σημείο Ο, ως προς έναν ακίνητο παρατηρητή.

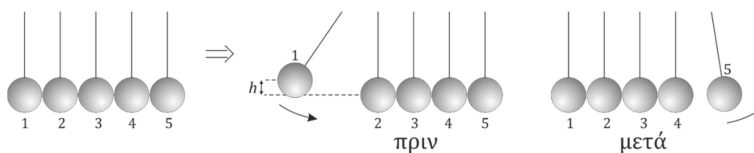
(μ.6)

- μία κυκλική κίνηση λόγω της περιστροφής της πλατφόρμας
- μία μεταφορική κίνηση με διεύθυνση παράλληλη με την ακτίνα και φορά προς το κέντρο της πλατφόρμας, λόγω της ακτινικής του ταχύτητας και
- μία μεταφορική κίνηση με διεύθυνση παράλληλη με την ακτίνα και φορά προς την περιφέρεια της πλατφόρμας, λόγω της κίνησης της πλατφόρμας στο σύστημα του κέντρου μάζας.

ΘΕΜΑ 5^ο

Η διάταξη των σφαιρών του Νεύτωνα αποτελείται από πέντε εντελώς ελαστικές σφαίρες ίδιας μάζας m και ίδιας ακτίνας R , οι οποίες βρίσκονται πολύ κοντά η μία στην άλλη, χωρίς να ακουμπούν μεταξύ τους. Όταν εκτρέψουμε μία σφαίρα στη μία πλευρά της διάταξης και την αφήσουμε ελεύθερη, αυτή συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με την πρώτη από τις υπόλοιπες τέσσερις σφαίρες, με ταχύτητα v_i και από την άλλη πλευρά της διάταξης εκτοξεύεται η τελευταία σφαίρα.

Όταν εκτρέψουμε ταυτόχρονα δύο σφαίρες από τη μια πλευρά, παρατηρούμε ότι εκτοξεύονται δύο σφαίρες από την άλλη πλευρά.



- (α) Να αναφέρετε ποιοι νόμοι διατήρησης ισχύουν κατά την ελαστική κρούση.

(μ.2)

Κατά την ελαστική κρούση ισχύουν οι νόμοι διατήρησης της ορμής και της κινητικής ενέργειας

$$\begin{array}{cc} \vec{p}_{\text{αρχ}} & = & \vec{p}_{\text{τελ}} \\ \text{αρχ} & & \text{τελ} \end{array} \quad \begin{array}{cc} \text{αρχ} & \text{τελ} \\ \text{κιν} & \text{κιν} \end{array}$$



(β) Να αποδείξετε ότι δύο σώματα ίσης μάζας ανταλλάζουν ταχύτητες, όταν συγκρουστούν κεντρικά και εντελώς ελαστικά.

(μ.6)

Διατήρηση ορμής:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \Rightarrow m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1) = m_2(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2) \quad (1)$$

$$\text{Διατήρηση Κιν. Ενέργειας: } \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \Rightarrow$$

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) \Rightarrow m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1)(\vec{v}_1 + \vec{v}'_1) = m_2(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2)(\vec{v}'_2 + \vec{v}_2) \quad (2)$$

Διαιρούμε τις εξισώσεις (2) και (1) κατά μέλη

$$\frac{m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1)(\vec{v}_1 + \vec{v}'_1)}{m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1)} = \frac{m_2(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2)(\vec{v}'_2 + \vec{v}_2)}{m_2(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2)}$$

και εξαγάγουμε μία σχέση ταχυτήτων για την ελαστική κρούση.

$$\vec{v}_1 + \vec{v}'_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}'_2 \quad (3)$$

Λύνοντας την εξίσωση (1) ως προς $\vec{v}'_1$:

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1}(\vec{v}_2 - \vec{v}'_2) + \vec{v}_1$$

Αντικαθιστούμε το $\vec{v}'_2$ από την εξίσωση (3):

$$\vec{v}'_1 = \frac{2m_2}{m_1}\vec{v}_2 - \frac{m_2}{m_1}\vec{v}_1 + \vec{v}_1 - \frac{m_2}{m_1}\vec{v}'_1$$

Αν $m_1 = m_2$ τότε η πιο πάνω εξίσωση δίνει

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_2 \quad (4)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3) και (4) καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_1$$

(γ) Αν εκτρέψουμε τη σφαίρα 1 έτσι ώστε να αποκτήσει αρχικό ύψος h και στη συνέχεια την αφήσουμε ελεύθερη, να υπολογίσετε συναρτήσει των m , R και v_i το ύψος h' στο οποίο θα φθάσει και την ταχύτητα v' με την οποία θα εκτοξευθεί η σφαίρα 5.

(μ.6)

Αν η σφαίρα 1 ανυψωθεί κατά h από την αρχική της θέση και αφεθεί να κινηθεί υπό την επίδραση του βάρους της και της τάσης του νήματος, τότε ισχύει το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh}$$

Αφού όλες οι σφαίρες έχουν την ίδια ακτίνα και την ίδια μάζα, τότε όλες οι μεταξύ τους κρούσεις θα είναι κεντρικές και ελαστικές.

Όταν η σφαίρα 1 συγκρουστεί με τη σφαίρα 2, η σφαίρα 2 θα κινηθεί με ταχύτητα $\sqrt{2gh}$ ενώ η σφαίρα 1 θα ακινητοποιηθεί. Αυτό θα συνεχιστεί μέχρι η σφαίρα 4 να συγκρουστεί με τη σφαίρα 5 η οποία θα αρχίσει να κινείται με ταχύτητα $\sqrt{2gh}$

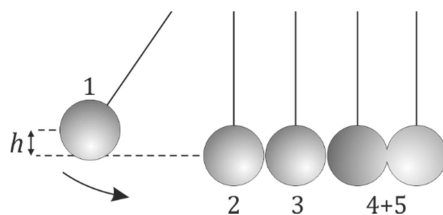
Θ.Δ.Μ.Ε για τη σφαίρα 5:

$$\frac{1}{2}mv_5^2 = mgh' \Rightarrow gh' = \frac{1}{2}2gh \Rightarrow h' = h$$



- (δ) Αν οι σφαίρες 4 και 5 είναι κολλημένες μεταξύ τους, να υπολογίσετε την ταχύτητα v_S με την οποία θα εκτοξευθεί το συσσωμάτωμα (σφαίρες 4 και 5) και το ύψος h_S στο οποίο θα φθάσει, αν η σφαίρα 1 αφεθεί ελεύθερη από ύψος h .

(μ.6)



$$m_{45} = 2m, m_1 = m_2 = m_3 = m, v_3 = \sqrt{2gh}, v_{45} = 0$$

Διατήρηση της ορμής και της κινητικής ενέργειας

$$m_3 \vec{v}_3 + m_{45} \vec{v}_{45} = m_3 \vec{v}'_3 + m_{45} \vec{v}'_{45} \Rightarrow \vec{v}_3 = \vec{v}'_3 + 2\vec{v}'_{45} \quad (1)$$

$$\vec{v}_3 + \vec{v}'_3 = \vec{v}_{45} + \vec{v}'_{45} \Rightarrow \vec{v}_3 + \vec{v}'_3 = \vec{v}'_{45} \quad (2)$$

$$\vec{v}_3 = \vec{v}'_3 + 2\vec{v}'_3 + 2\vec{v}_3 \Rightarrow \vec{v}'_3 = -\frac{1}{3}\vec{v}_3 \Rightarrow \vec{v}'_3 = -\frac{\sqrt{2gh}}{3}$$

Αν οι σφαίρες 4 και 5 είναι κολλημένες μεταξύ τους τότε η σφαίρα 3 ανακρούεται και κτυπά τη σφαίρα 2 και αυτή με τη σειρά της τη σφαίρα 1.

Τελικά αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2): $\vec{v}'_{45} = \frac{2}{3}\sqrt{2gh}$

Θ.Δ.Μ.Ε για το συσσωμάτωμα 4+5

$$\frac{1}{2} 2m \left(\frac{2}{3} \sqrt{2gh} \right)^2 = 2m g h_{45} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} 2gh = gh_{45} \Rightarrow h_{45} = \frac{4}{9}h$$

**ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ
ΛΥΣΕΩΝ**