

ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ



26^Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (Πρώτη Φάση)

Κυριακή, 15 Ιανουαρίου, 2012

Ώρα: 10:00 - 13:00

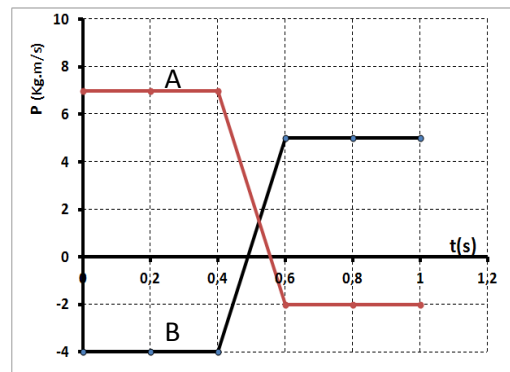
Οδηγίες:

- 1) Το δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες και πέντε (5) θέματα.
- 2) Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα του δοκιμίου.
- 3) Επιτρέπεται η χρήση μόνο μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- 4) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- 5) Επιτρέπεται η χρήση ΜΟΝΟ μπλε μελανιού. (Οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
- 6) Τα σχήματα των θεμάτων δεν είναι υπό κλίμακα.
- 7) Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

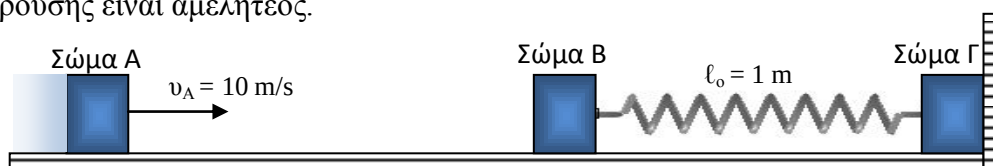
ΘΕΜΑ 1^ο: (Μονάδες 25)

A. α. Να διατυπώσετε το γενικευμένο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. (μον. 2)

β. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η διπλανή γραφική παράσταση της ορμής σε σχέση με το χρόνο $P = f(t)$ για δύο σφαίρες A και B οι οποίες βρίσκονται σε λείο οριζόντιο επίπεδο παριστάνει πλαστική κρούση. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (μον. 3)



B. Σώμα A μάζας $m_A = 0,5 \text{ kg}$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα $v_A = 10 \text{ m/s}$ και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα B τη χρονική στιγμή $t = 0$. Το σώμα B έχει μάζα $m_B = 2 \text{ kg}$ και είναι στερεωμένο στο ένα άκρο ελατηρίου το οποίο έχει σταθερά $k = 200 \text{ N/m}$ και φυσικό μήκος $\ell_0 = 1 \text{ m}$. Στο άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο το σώμα Γ μάζας $m_\Gamma = 2 \text{ kg}$ το οποίο εφάπτεται σε ακλόνητο κατακόρυφο τοίχο όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Ο χρόνος της κρούσης είναι αμελητέος.



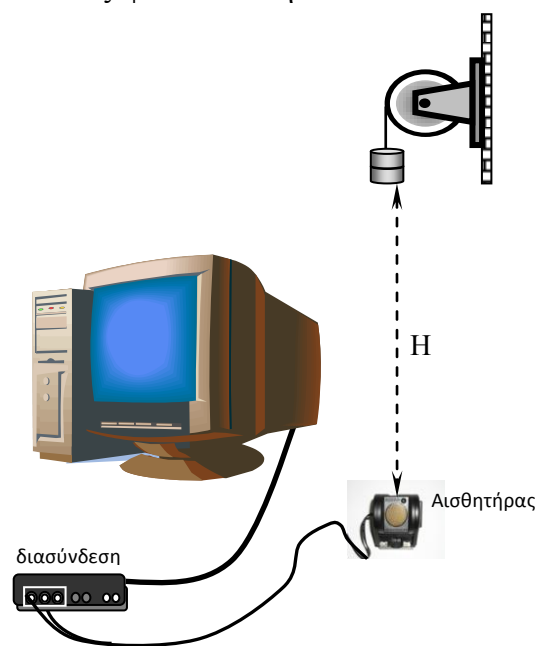
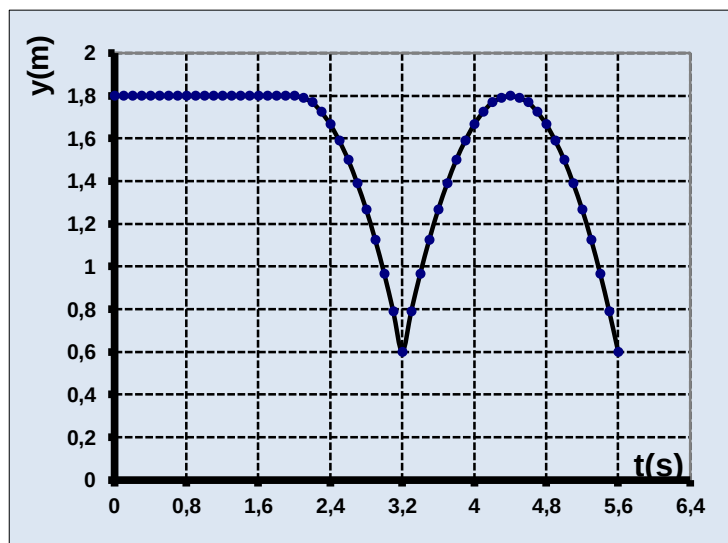
α. Να υπολογίσετε:

- τις ταχύτητες των σωμάτων Α και Β αμέσως μετά την κρούση, (μον. 4)
- την ελάχιστη απόσταση των σωμάτων Β και Γ, (μον. 3)
- τη χρονική στιγμή που το σώμα Γ χάνει την επαφή με τον κατακόρυφο τοίχο, (μον. 4)
- τη μέγιστη δύναμη που ασκεί ο κατακόρυφος τοίχος στο σώμα Γ μετά την κρούση των σωμάτων Α και Β, (μον. 5)

β. Να κατασκευάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση της ταχύτητας του σώματος Β σε σχέση με το χρόνο από τη χρονική στιγμή που έγινε η κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή που το σώμα Γ χάνει την επαφή με τον κατακόρυφο τοίχο. (μον. 4)

ΘΕΜΑ 2^ο: (Μονάδες 10)

Ένας μαθητής βρίσκεται στο εργαστήριο Φυσικής για να υπολογίσει τη ροπή αδράνειας μιας τροχαλίας. Αναρτά στην τροχαλία βαρίδια μάζας 1 kg σε απόσταση H από τον αισθητήρα της κίνησης όπως φαίνεται στο σχήμα και ακολούθως θέτει τον αισθητήρα σε λειτουργία. Τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ αφήνει ελεύθερα τα βαρίδια και ο αισθητήρας καταγράφει τη θέση των βαριδιών σε σχέση με τον χρόνο όπως φαίνεται στην πιο κάτω γραφική παράσταση.



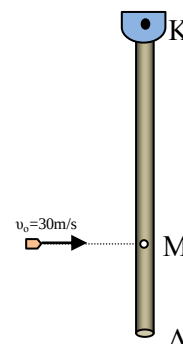
α. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της τροχαλίας, αν η ακτίνα της είναι $r = 0,1 \text{ m}$.

(μον. 6)

β. Τη χρονική στιγμή $t = 2,6 \text{ s}$ να υπολογίσετε το λόγο της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας προς την κινητική ενέργεια των βαριδιών. (μον. 4)

ΘΕΜΑ 3^ο: (Μονάδες 20)

Η ράβδος ΚΛ του διπλανού σχήματος έχει μήκος $\ell = 0,8 \text{ m}$ και μάζα $M = 1,2 \text{ kg}$. Αρχικά η ράβδος ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο Κ. Πλαστελίνη μάζας $m = 0,4 \text{ kg}$ κινείται οριζόντια με αρχική ταχύτητα $v_0 = 30 \text{ m/s}$ και προσκρούει και προσκολλάται στη ράβδο στο σημείο Μ το οποίο απέχει $\ell/4$ από το Λ. Η ροπή αδράνειας της ράβδου δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{3} M \ell^2$ και η διάρκεια της κρούσης θεωρείται



αμελητέα

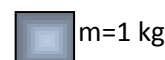
α. Να υπολογίσετε:

- i. την αρχική ολική στροφορμή του συστήματος, (μον. 2)
 - ii. τη γωνιακή ταχύτητα με την οποία αρχίζει το σύστημα να περιστρέφεται, (μον. 3)
 - iii. την απώλεια της κινητικής ενέργειας κατά την κρούση, (μον. 3)
 - iv. τη γραμμική ταχύτητα της πλαστελίνης όταν η ράβδος σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία 60° . (μον. 5)
- β. Να διερευνήσετε αν η ράβδος μπορεί να κάνει πλήρη περιστροφή. (μον. 4)
- γ. Να κατασκευάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση της στροφορμής του συστήματος σε σχέση με τη γωνιακή ταχύτητα $L_{\text{συστ}} = f(\omega)$. (μον. 3)

ΘΕΜΑ 4^ο: (Μονάδες 25)

A. Τί ονομάζουμε Απλή Αρμονική Ταλάντωση (Α.Α.Τ.) και ποια είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εκτελεί ένα σώμα Α.Α.Τ; (μον. 2)

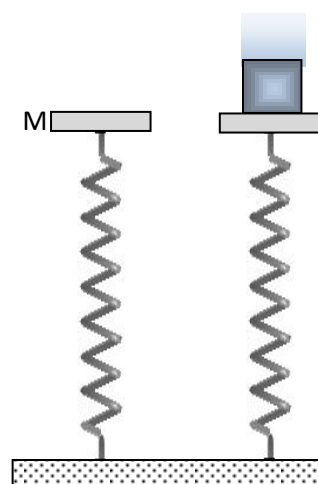
B. Μία πλατφόρμα μάζας $M = 3 \text{ kg}$ είναι στερεωμένη και ισορροπεί στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου αβαρούς ελατηρίου σταθεράς $K = 100 \text{ N/m}$. Σώμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ αφήνεται ελεύθερο από ύψος $h = 1,8 \text{ m}$ πάνω από την πλατφόρμα με αποτέλεσμα να συγκρουστεί πλαστικά με την πλατφόρμα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι το συσσωμάτωμα εκτελεί Α.Α.Τ. (μον. 3)

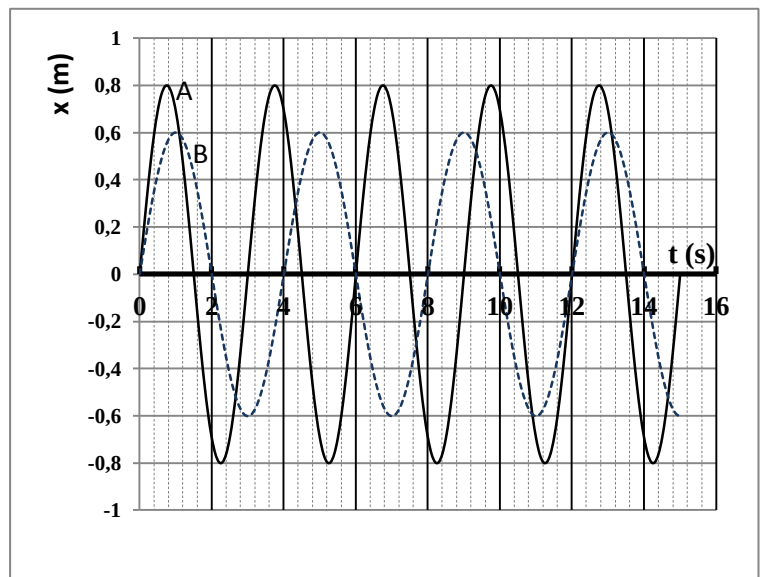
β. Να υπολογίσετε:

- i. την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση, (μον. 4)
 - ii. την περίοδο της ταλάντωσης, (μον. 2)
 - iii. το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση, (μον. 4)
 - iv. το πλάτος της ταλάντωσης, (μον. 4)
 - v. τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου σε σχέση με το φυσικό του μήκος, (μον. 2)
- γ. Σε ποια θέση η κινητική ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης; (μον. 4)



ΘΕΜΑ 5^ο: (Μονάδες 20)

Στη διπλανή γραφική παράσταση δίνεται η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας σε σχέση με το χρόνο για δύο σώματα Α και Β που έχουν μάζες $m_A = 0,3 \text{ kg}$ και $m_B = 0,4 \text{ kg}$ και τα οποία εκτελούν Απλή Αρμονική Ταλάντωση.



- A. Να προσδιορίσετε, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας, τη χρονική στιγμή, μετά από τη χρονική στιγμή $t = 0$, κατά την οποία:
- τα δύο σώματα διέρχονται συγχρόνως για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπία με τις ταχύτητες τους να έχουν ίδια φορά, (μον. 1,5)
 - τα δύο σώματα διέρχονται συγχρόνως για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπία με τις ταχύτητες τους να έχουν αντίθετη φορά. (μον. 1,5)
- B. α. Να υπολογίσετε:
- το λόγο της μέγιστης ταχύτητας του σώματος Α προς τη μέγιστη ταχύτητα του Β. (μον. 2)
 - το λόγο της κινητικής ενέργειας του Α προς την κινητική ενέργεια του Β τη χρονική στιγμή $t = 6 \text{ s}$. (μον. 3)
 - το λόγο της ελαστικής δυναμικής ενέργειας του Β προς την κινητική ενέργεια του Α τη χρονική στιγμή $t = 5 \text{ s}$. (μον. 4)
- β. Να χαράξετε στους ίδιους βαθμολογημένους άξονες τις γραφικές παραστάσεις της κινητικής ενέργειας και της ελαστικής δυναμικής ενέργειας σε σχέση με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας για το σώμα Α. (μον. 4)
- γ. Να χαράξετε στους ίδιους βαθμολογημένους άξονες τις γραφικές παραστάσεις της κινητικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας σε σχέση με το χρόνο για το σώμα Β για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 4 \text{ s}$. (μον. 4)

Τέλος

ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ



26^Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (Πρώτη Φάση)

Κυριακή, 15 Ιανουαρίου, 2012

Ώρα: 10:00 - 13:00

Οδηγίες:

- 1) Το δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες και πέντε (5) θέματα.
- 2) Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα του δοκιμίου.
- 3) Επιτρέπεται η χρήση μόνο μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- 4) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- 5) Επιτρέπεται η χρήση ΜΟΝΟ μπλε μελανιού. (Οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
- 6) Τα σχήματα των θεμάτων δεν είναι υπό κλίμακα.
- 7) Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο: (Μονάδες 25)

Α. α. Να διατυπώσετε το γενικευμένο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

(μον. 2)

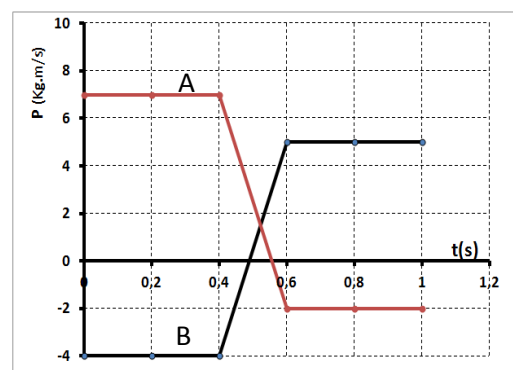
Σύμφωνα με το 2ο νόμο του Νεύτωνα, όταν πάνω σε ένα σώμα ασκούνται δυνάμεις και η συνισταμένη τους είναι διάφορη του μηδενός τότε, το σώμα αποκτά επιτάχυνση οπότε η ορμή μεταβάλλεται.

«Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος ισούται με τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα.»

(μον. 2)

β. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η διπλανή γραφική παράσταση της ορμής σε σχέση με το χρόνο $P = f(t)$ για δύο σφαίρες Α και Β οι οποίες βρίσκονται σε λείο οριζόντιο επίπεδο παριστάνει πλαστική κρούση. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(μον. 3)



Η ορμή είναι διανυσματικό μέγεθος και δίνεται από την σχέση $\vec{P} = m \cdot \vec{u}$. Αρχικά τα σώματα Α και Β κινούνται αντίθετες φορές γιατί η ορμή του σώματος Α είναι θετική ($\vec{P}_A = +7 \text{ kg.m/s}$) ενώ του σώματος Β αρνητική ($\vec{P}_B = -4 \text{ kg.m/s}$). Μετά την κρούση οι ορμές τους είναι και πάλι αντίθετες ($\vec{P}'_A = -2 \text{ kg.m/s}$ και $\vec{P}'_B = +5 \text{ kg.m/s}$). Στην

πλαστική κρούση τα δυο σώματα έχουν κοινή ταχύτητα άρα οι ορμές των δύο σωμάτων θα πρέπει να είναι ομόρροπες άρα ο συλλογισμός του είναι λανθασμένος.

(μον. 3)

- B. Σώμα A μάζας $m_A = 0,5 \text{ kg}$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα $u_A = 10 \text{ m/s}$ και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα B τη χρονική στιγμή $t = 0$. Το σώμα B έχει μάζα $m_B = 2 \text{ kg}$ και είναι στερεωμένο στο ένα άκρο ελατηρίου το οποίο έχει σταθερά $k = 200 \text{ N/m}$ και φυσικό μήκος $\ell_0 = 1 \text{ m}$. Στο άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο το σώμα Γ μάζας $m_\Gamma = 2 \text{ kg}$ το οποίο εφάπτεται σε ακλόνητο κατακόρυφο τοίχο όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Ο χρόνος της κρούσης είναι αμελητέος.



α, Να υπολογίσετε:

- i. τις ταχύτητες των σωμάτων A και B αμέσως μετά την κρούση,

(μον. 4)

Από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_{\text{εξ.}} &= \frac{\Delta P}{\Delta t} \\ \Sigma F_{\text{εξ.}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \frac{\Delta P}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \Delta P = 0 \Rightarrow P_{\text{τελ.}} - P_{\text{αρχ.}} = 0 \Rightarrow P_{\text{αρχ.}} = P_{\text{τελ.}}$$

$$P_A + P_B = P'_A + P'_B$$

$$m_A u_A + m_B u_B = m_A v_A + m_B v_B$$

$$m_A (u_A - v_A) = m_B v_B \quad (1)$$

(μον. 1)

Από την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας:

$$E_{\text{κινA}} + E_{\text{κινB}} = E'_{\text{κινA}} + E'_{\text{κινB}}$$

$$\frac{1}{2} m_A u_A^2 + \frac{1}{2} m_B u_B^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

$$\frac{1}{2} m_A u_A^2 - \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

$$m_A (u_A^2 - v_A^2) = m_B v_B^2$$

$$m_A (u_A - v_A) (u_A + v_A) = m_B v_B^2 \quad (2)$$

(μον. 1)

Διαιρώντας (2)/(1):

$$m_A (u_A - v_A) (u_A + v_A) = m_B v_B^2$$

$$\frac{m_A (u_A - v_A) = m_B v_B}{(u_A + v_A) = v_B} \quad (3)$$

(μον. 1)

Από την εξίσωση (3) και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1)

$$10 + v_A = v_B$$

$$\Rightarrow 0,5 (10 - v_A) = 2 v_B$$

$$0,5 (10 - v_A) = 2 (10 + v_A)$$

$$-2,5 v_A = 15$$

$$v_A = -6 \text{ m/s} \quad \text{και} \quad v_B = +4 \text{ m/s}$$

(μον. 1)

ii. την ελάχιστη απόσταση των σωμάτων Β και Γ, (μον. 3)

Από την Αρχή της Μηχανικής Ενέργειας υπολογίζετε η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου:

$$E_{\text{μηχαρχ}} = E_{\text{μηχτελ}}$$

$$E'_{\text{κινΒ}} = E_{\text{ελ}}$$

$$\frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} k \Delta \ell^2$$

$$2 \cdot (4)^2 = 200 \Delta \ell^2$$

$$\Delta \ell^2 = 32/200$$

$$\Delta \ell = 0,4 \text{ m}$$

(μον. 2)

Η ελάχιστη απόσταση των σωμάτων Β και Γ

$$\Delta x = \ell_0 - \Delta \ell$$

$$\Delta x = 1 - 0,4 \text{ m}$$

$$\Delta x = 0,6 \text{ m}$$

(μον. 1)

iii. τη χρονική στιγμή που το σώμα Γ χάνει την επαφή με τον κατακόρυφο τοίχο, (μον. 4)

$$k = D$$

$$k = m\omega^2$$

$$k = m(2\pi/T)^2$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_B}{k}} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{200}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{10} \text{ s} \rightarrow T = \frac{\pi}{5} \text{ s}$$

(μον. 2)

Το σώμα Γ χάνει την επαφή με τον κατακόρυφο τοίχο όταν το σώμα Β που εκτελεί Α.Α.Τ. διέρχεται από την Θ.Ι. και το ελατήριο αρχίζει να επιμηκύνεται δηλαδή

$$t = \frac{T}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{10} \text{ s}$$

(μον. 2)

iv. τη μέγιστη δύναμη που ασκεί ο κατακόρυφος τοίχος στο σώμα Γ μετά την κρούση των σωμάτων Α και Β, (μον. 5)

Την στιγμή της μέγιστης συσπείρωσης

$$\Sigma F = 0$$

$$F_{\text{ελ}} - F_{\text{τοιχ}} = 0$$

$$F_{\text{τοιχ}} = k \cdot \Delta \ell$$

$$F_{\text{τοιχ}} = 200 \cdot 0,4$$

$$F_{\text{τοιχ}} = 80 \text{ N}$$

(μον. 5)

β. Να κατασκευάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση της ταχύτητας του σώματος Β σε σχέση με το χρόνο από τη χρονική στιγμή που έγινε η κρούση μέχρι τη χρονική στιγμή που το σώμα Γ χάνει την επαφή με τον κατακόρυφο τοίχο. (μον. 4)

$$u_0 = v_B = +4 \text{ m/s}$$

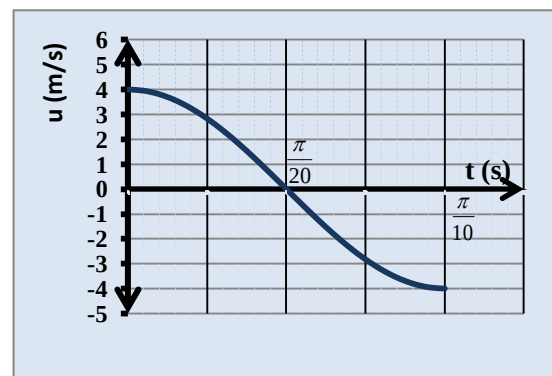
$$u_0 = \omega \cdot x_0 \rightarrow u_0 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} \cdot 0,4$$

$$u_0 = 4 \text{ m/s}$$

(μον.1)

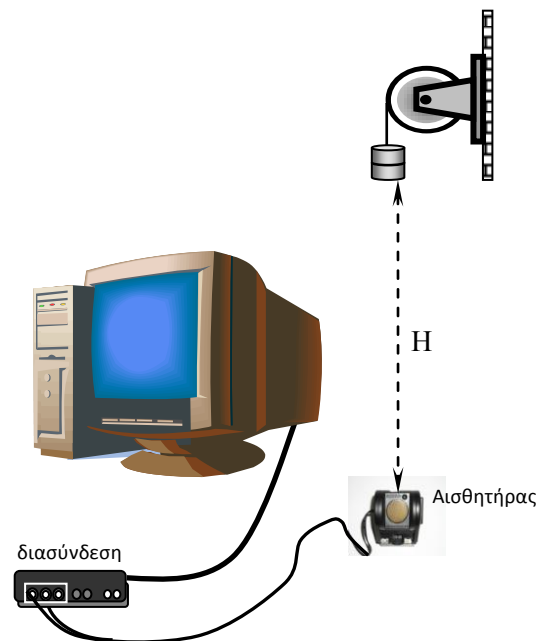
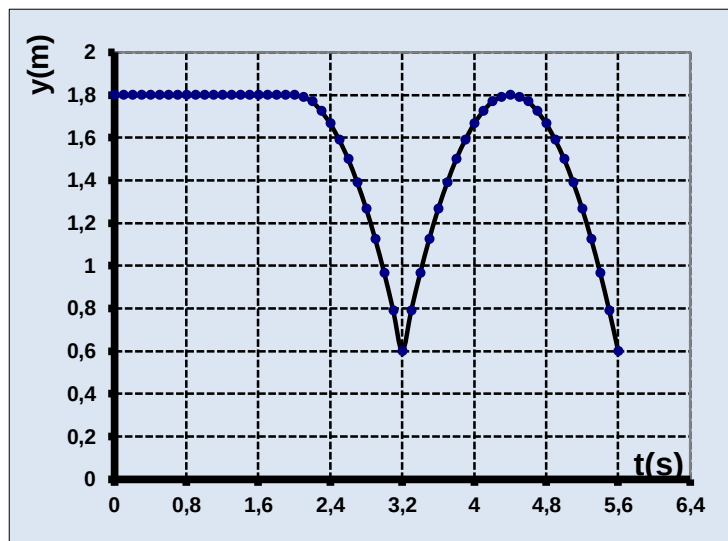
Για τη βαθμολόγηση του άξονα του χρόνου. (μον.1)

Για τη χάραξη της γραφικής παράστασης. (μον. 2)



ΘΕΜΑ 2^ο: (Μονάδες 10)

Ένας μαθητής βρίσκεται στο εργαστήριο Φυσικής για να υπολογίσει τη ροπή αδράνειας μιας τροχαλίας. Αναρτά στην τροχαλία βαρίδια μάζας 1 kg σε απόσταση H από τον αισθητήρα της κίνησης όπως φαίνεται στο σχήμα και ακολούθως θέτει τον αισθητήρα σε λειτουργία. Τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ αφήνει ελεύθερα τα βαρίδια και ο αισθητήρας καταγράφει τη θέση των βαριδιών σε σχέση με τον χρόνο όπως φαίνεται στην πιο κάτω γραφική παράσταση.



α. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της τροχαλίας αν η ακτίνα της είναι $r = 0,1 \text{ m}$.

(μον. 6)

$$y = H - \ell \quad \ell: \text{ελάχιστη απόσταση των βαριδιών από τον αισθητήρα.}$$

$$y = 1,8 - 0,6$$

$$y = 1,2 \text{ m}$$

(μον. 0,5)

$$y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2$$

$$1,2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (1,2)^2 \quad (\Delta t = 3,2 - 2 \text{ s} = 1,2 \text{ s})$$

$$a = \frac{5 \text{ m}}{3 \text{ s}^2}$$

(μον. 1)

$$u = a \cdot t$$

$$u = \frac{5}{3} \cdot 1,2$$

$$u = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(μον. 0,5)

$$E_{\text{μηχαρχ}} = E_{\text{μηχτελ.}}$$

$$E_{\text{δυν}} = E_{\text{κιν.βαρ}} + E_{\text{κιν.τρο}}$$

$$m \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2} m u_{\beta\alpha\rho}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{τροχ}} \cdot \omega_{\text{τροχ}}^2$$

$$m \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2} m u_{\beta\alpha\rho}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{τροχ}} \cdot \frac{v^2}{r^2_{\text{τροχ}}} \quad (\text{μον. 2})$$

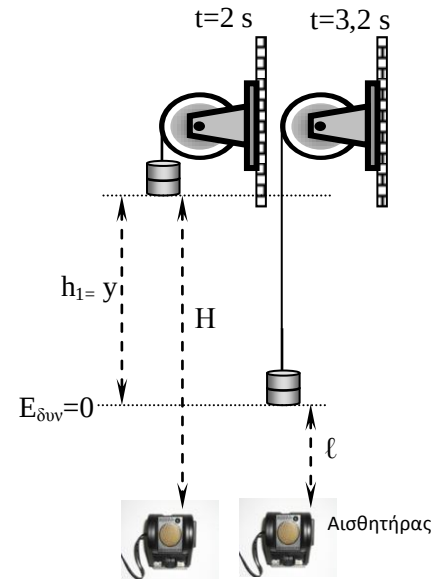
$$1 \cdot 10 \cdot 1,2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{\text{τροχ}} \cdot \frac{2^2}{0,1^2}$$

$$12 = 2 + 200 \cdot I_{\text{τροχ}}$$

$$10 = 200 \cdot I_{\text{τροχ}}$$

$$I_{\text{τροχ}} = 0,05 \text{ kg.m}^2$$

(μον. 2)



β. Τη χρονική στιγμή $t = 2,6 \text{ s}$ να υπολογίσετε το λόγο της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας προς την κινητική ενέργεια των βαριδιών. (μον. 4)

$$t = 2,6 - 2 = 0,6 \text{ s}$$

$$u = a \cdot t = (5/3) \cdot 0,6 = 1 \text{ m/s}$$

(μον. 1)

$$\frac{E_{\text{κιν.τρο}}}{E_{\text{κιν.βαρ}}} = \frac{\frac{1}{2} I_{\text{τροχ}} \omega^2}{\frac{1}{2} m u^2} = \frac{\frac{1}{2} I_{\text{τροχ}} \frac{v^2}{r^2}}{\frac{1}{2} m u^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (0,05) \cdot \frac{1^2}{0,1^2}}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1^2} = \frac{5}{1}$$

$$\frac{E_{\text{κιν.τρο}}}{E_{\text{κιν.βαρ}}} = \frac{5}{1}$$

(μον. 3)

ΘΕΜΑ 3^ο: (Μονάδες 20)

Η ράβδος ΚΛ του διπλανού σχήματος έχει μήκος $\ell = 0,8 \text{ m}$ και μάζα $M = 1,2 \text{ kg}$. Αρχικά η ράβδος ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο Κ. Πλαστελίνη μάζας $m = 0,4 \text{ kg}$ κινείται οριζόντια με αρχική ταχύτητα $v_0 = 30 \text{ m/s}$ και προσκρούει και προσκολλάται στη ράβδο στο σημείο Μ το οποίο απέχει $\ell/4$ από το Λ. Η ροπή αδράνειας της ράβδου δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{3} M \ell^2$ και η διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.

α. Να υπολογίσετε:

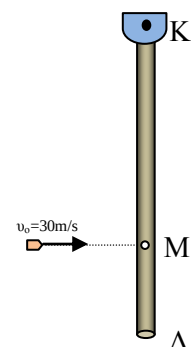
i. την αρχική ολική στροφορμή του συστήματος, (μον. 2)

$$L_{\text{αρχ.}} = m \cdot v \cdot r$$

$$L_{\text{αρχ.}} = m \cdot v \cdot (3\ell/4)$$

$$L_{\text{αρχ.}} = 0,4 \cdot 30 \cdot (3 \cdot 0,8/4) \rightarrow L_{\text{αρχ.}} = 7,2 \text{ kg.m}^2/\text{s}$$

(μον. 2)



ii. τη γωνιακή ταχύτητα με την οποία αρχίζει το σύστημα να περιστρέφεται, (μον. 3)

Όταν η ράβδος βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση η συνισταμένη ροπή των δυνάμεων του βάρους της ράβδου και της πλαστελίνης είναι ίση με μηδέν ($\Sigma M_{εξ} = 0$) γιατί οι διευθύνσεις τους διέρχονται από τον άξονα περιστροφής. Έτσι για το σύστημα πλαστελίνη – ράβδος ισχύει η αρχής διατήρησης της στροφορμής.

$$\left. \begin{aligned} \Sigma M_{εξ} &= \frac{\Delta L}{\Delta t} \\ \Sigma M_{εξ} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \frac{\Delta L}{\Delta t} = 0 \rightarrow \Delta L = 0 \rightarrow L_{τελ} - L_{αρχ} = 0 \rightarrow L_{αρχ} = L_{τελ}$$

$$L_{πλαστ} + L_{ραβ} = L'_{πλαστ} + L'_{ραβ}$$

$$m.v.r + I_{ραβ}\omega_{ραβ} = (I_{πλ} + I_{ραβ})\omega_k$$

$$m.v.(3\ell/4) = (I_{πλ} + I_{ραβ})\omega_k$$

$$\omega_k = 18 \text{ rad/s}$$

(μον. 3)

iii. την απώλεια της κινητικής ενέργειας κατά την κρούση, (μον. 3)

$$E_{αρχ} = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}0,4 \cdot 30^2 = 180 \text{ J}$$

(μον. 1)

$$E_{τελ} = \frac{1}{2}(I_{ραβ} + I_{πλ}).\omega^2 = \frac{1}{2}(0,256 + 0,144) \cdot 18^2 = 64,8 \text{ J}$$

(μον. 1)

$$\Delta E = E_{τελ} - E_{αρχ} = 64,8 - 180 \rightarrow \Delta E = -115,2 \text{ J}$$

(μον. 1)

iv. τη γραμμική ταχύτητα της πλαστελίνης όταν η ράβδος σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία 60° . (μον. 5)

Για την πλαστελίνη

$$y_1 = (3\ell/4) \cdot \sin 60^\circ$$

$$y_1 = (3 \cdot 0,8/4) \cdot 0,5$$

$$y_1 = 0,3 \text{ m}$$

$$h_1 = (3\ell/4) - y_1$$

$$h_1 = 0,6 - 0,3 = 0,3 \text{ m}$$

(μον. 1)

Για το κ.μ. της ράβδου

$$y_2 = (\ell/2) \cdot \sin 60^\circ$$

$$y_2 = (0,8/2) \cdot 0,5$$

$$y_2 = 0,2 \text{ m}$$

$$h_2 = (3\ell/4) - y_2$$

$$h_2 = 0,6 - 0,2 = 0,4 \text{ m}$$

(μον. 1)

Μετά την κρούση της πλαστελίνης στην ράβδο

$$E_{μηχ.αρχ.} = E_{μηχ.τελ.}$$

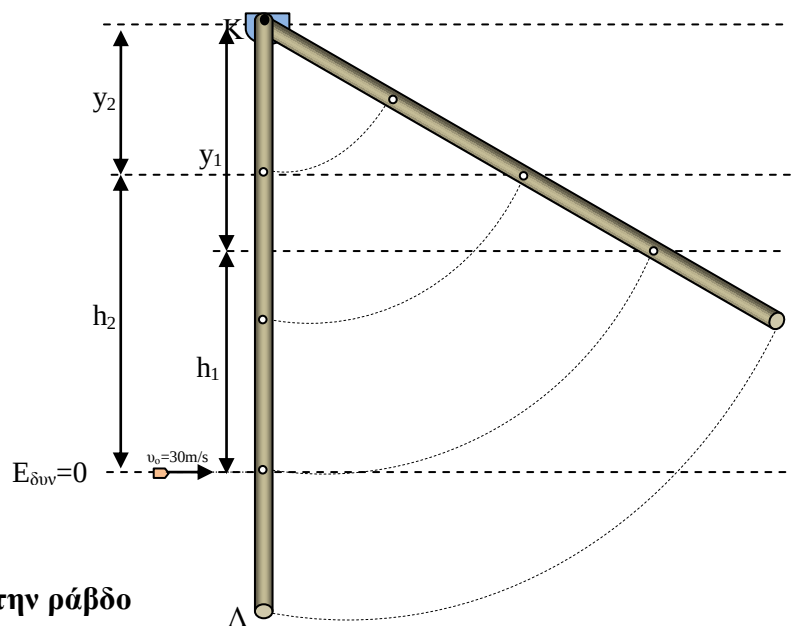
$$E_{κιν.πλ.} + E_{κιν.ραβ} + E_{δυν.ραβ} = E_{κιν.πλ} + E_{κιν.ραβ} + E_{δυν.ραβ} + E_{δυν.πλ}$$

$$\frac{1}{2}(I_{ραβ}).\omega_k^2 + \frac{1}{2}(I_{πλ}).\omega_k^2 + Mg.h = \frac{1}{2}(I_{ραβ} + I_{πλ}).\omega_{κ60^\circ}^2 + Mgh_2 + mgh_1$$

$$\frac{1}{2}(0,256 + 0,144) \cdot 18^2 + 1,2 \cdot 10 \cdot 0,2 = \frac{1}{2}(0,4) \cdot \omega_{κ60^\circ}^2 + 1,2 \cdot 10 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 10 \cdot 0,3$$

$$64,8 + 2,4 = 0,2 \cdot \omega_{κ60^\circ}^2 + 4,8 + 1,2$$

$$\omega_{κ60^\circ}^2 = 306$$



$$\omega_{\kappa 60^\circ} = 17,49 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(μον. 2,5)

Η γραμμική ταχύτητα της πλαστελίνης

$$u = \omega \cdot r$$

$$u = \omega \cdot (3\ell/4)$$

$$u = 17,49 \cdot (3 \cdot 0,8/4)$$

$$u = 10,49 \text{ m/s}$$

(μον. 0,5)

β. Να διερευνήσετε αν η ράβδος μπορεί να κάνει πλήρη περιστροφή.

(μον. 4)

$$E_{\text{μηχ.αρχ.}} = E_{\text{μηχ.τελ.}}$$

$$E_{\text{κιν.πλ.}} + E_{\text{κιν.ραβ}} + E_{\text{δυν.ραβ}} = E_{\text{κιν.πλ}} + E_{\text{κιν.ραβ}} + E_{\text{δυν.ραβ}} + E_{\text{δυν.πλ}}$$

$$\frac{1}{2}(I_{\rho\alpha\beta}) \cdot \omega_{\kappa}^2 + \frac{1}{2}(I_{\pi\lambda}) \cdot \omega_{\kappa}^2 + Mg \cdot h = \frac{1}{2}(I_{\rho\alpha\beta} + I_{\pi\lambda}) \cdot \omega_{\kappa\tau}^2 + Mg((5\ell/4) + mg(6\ell/4))$$

$$\frac{1}{2}(0,256 + 0,144) \cdot 18^2 + 1,2 \cdot 10 \cdot 0,2 = \frac{1}{2}(0,4) \cdot \omega_{\kappa\tau}^2 + 1,2 \cdot 10 \cdot 1 + 0,4 \cdot 10 \cdot 1,2$$

$$64,8 + 2,4 = 0,2 \cdot \omega_{\kappa\tau}^2 + 12 + 4,8$$

$$\omega_{\kappa\tau}^2 = 252$$

$$\omega_{\kappa\tau} = 15,87 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(μον. 3,5)

Επειδή η γωνιακή ταχύτητα είναι θετική, $\omega_{\kappa\tau} > 0$, θα μπορέσει η ράβδος να κάνει πλήρη περιστροφή.

(μον. 0,5)

γ. Να κατασκευάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση της στροφορμής του συστήματος σε σχέση με τη γωνιακή ταχύτητα $L_{\text{συστ}} = f(\omega)$.

(μον. 3)

Σύμφωνα με τη σχέση $L = I \cdot \omega$ η γραφική παράσταση $L = f(\omega)$ θα είναι ευθεία γραμμή. Για τη συγκεκριμένη άσκηση αυτή η ευθεία έχει συγκεκριμένα όρια.

Στην κατώτερη θέση όπου έγινε η κρούση

$$\omega_{\kappa} = 18 \text{ rad/s}$$

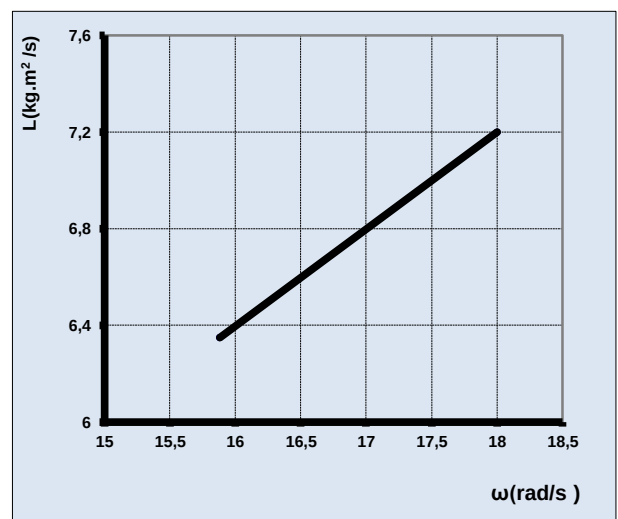
$$\text{και } L_{\text{αρχ.}} = 7,2 \text{ kg.m}^2/\text{s} \quad (\text{μον. 1})$$

Στην ανώτερη θέση

$$\omega_{\kappa\tau} = 15,87 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$L_{\text{αρχ.}} = 6,35 \text{ kg.m}^2/\text{s} \quad (\text{μον. 1})$$

Η χάραξη της γραφικής παράστασης (μον. 1)



ΘΕΜΑ 4^ο: (Μονάδες 25)

- A. Τί ονομάζουμε Απλή Αρμονική Ταλάντωση (Α.Α.Τ.) και ποια είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εκτελεί ένα σώμα Α.Α.Τ; (μον. 2)

Απλή Αρμονική Ταλάντωση (Α.Α.Τ) ονομάζουμε την ευθύγραμμη περιοδική παλινδρομική κίνηση, κατά την οποία η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι ημιτονοειδής (ή συνημιτονοειδής) συνάρτηση του χρόνου.

Για να εκτελεί ένα σώμα Απλή Αρμονική Ταλάντωση πρέπει να ασκείται σε αυτό δύναμη που να έχει μέτρο ανάλογο με την απομάκρυνση. Η δύναμη αυτή έχει φορά προς τη θέση ισορροπίας, δηλαδή τείνει να φέρει το σώμα που εκτελεί ταλάντωση στη θέση ισορροπίας, γι' αυτό ονομάζεται δύναμη επαναφοράς. $\Sigma F = -Dy$

- B. Μία πλατφόρμα μάζας $M = 3 \text{ kg}$ είναι στερεωμένη και ισορροπεί στο ελεύθερο άκρο κατακόρυφου αβαρούς ελατηρίου σταθεράς $K = 100 \text{ N/m}$. Σώμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ αφήνεται ελεύθερο από ύψος $h = 1,8 \text{ m}$ πάνω από την πλατφόρμα με αποτέλεσμα να συγκρουστεί πλαστικά με την πλατφόρμα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
α. Να αποδείξετε ότι το συσσωμάτωμα εκτελεί Α.Α.Τ. (μον. 3)

Στην Αρχική Θ.Ι.

$$\Sigma F = 0$$

$$B_1 - F_{ελ1} = 0$$

$$Mg - ky_1 = 0$$

(μον. 1)

Στην Νέα Θ.Ι.

$$\Sigma F = 0$$

$$B_1 + B_2 - F_{ελ2} = 0$$

$$Mg + mg - k(y_1 + y_2) = 0$$

(μον. 1)

Στην Τυχαία Θέση

$$\Sigma F = B_1 + B_2 - F_{ελ3}$$

$$\Sigma F = Mg + mg - k(y_1 + y_2 + y)$$

$$\Sigma F = \cancel{Mg} + \cancel{mg} - \cancel{ky_1} - \cancel{ky_2} - ky$$

$$\Sigma F = -ky \rightarrow \Sigma F = -D.y$$

(μον. 1)

β. Να υπολογίσετε:

- i. την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση, (μον. 4)

Για το Σώμα μάζας m

$$E_{μηχ.αρχ.} = E_{μηχ.τελ.}$$

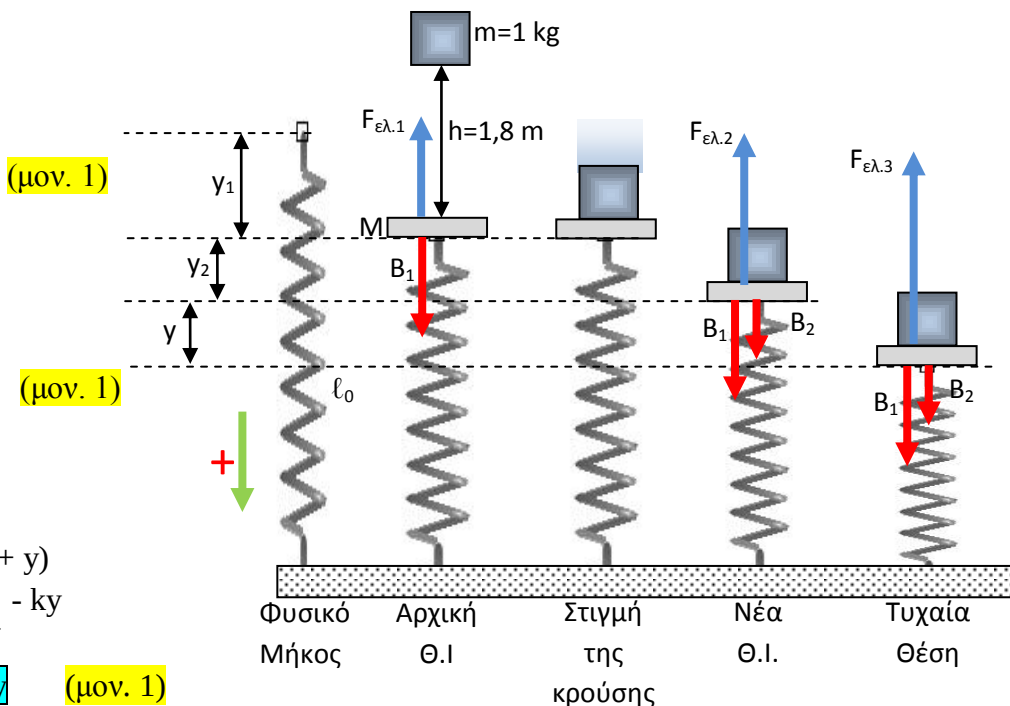
$$E_{δυν} = E_{κιν}$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} mu^2$$

$$u = \sqrt{2gh}$$

$$u = 6 \text{ m/s}$$

(μον. 2)





$$P_{\text{αρχ}} = P_{\text{τελ}}$$

$$P_A + P_B = P'_A + P'_B$$

$$mv_A + Mv_B = (m + M)v_k$$

$$1.6 = (1+3) v_k$$

$$v_k = 1,5 \text{ m/s}$$

(μον. 2)

ii. την περίοδο της ταλάντωσης,

(μον. 2)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m+M}{k}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1+3}{100}}$$

$$T = 2\pi \frac{2}{10}$$

$$T = \frac{2\pi}{5} \text{ s}$$

(μον. 2)

iii. το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση,

(μον. 4)

$$\alpha = -\omega^2 y_2$$

$$\Sigma F = 0$$

$$\Sigma F = 0$$

$$\alpha = -\left(\frac{2\pi}{\frac{5}{0,1}}\right)^2 \cdot 0,1$$

$$B_1 - F_{\epsilon\lambda 1} = 0$$

$$B_1 + B_2 - F_{\epsilon\lambda 2} = 0$$

$$\alpha = -(5)^2 \cdot 0,1$$

$$Mg - ky_1 = 0$$

$$Mg + mg - k(y_1 + y_2) = 0$$

$$\alpha = -2,5 \frac{m}{s^2}$$

(μον. 2)

$$y_1 = 30/100$$

$$y_2 = (40-30)/100$$

$$y_1 = 0,3 \text{ m}$$

(μον. 1)

$$y_2 = 0,1$$

(μον. 1)

iv. το πλάτος της ταλάντωσης,

(μον. 4)

Α' Τρόπος

$$u = \pm \omega \sqrt{y_0^2 - y^2}$$

$$1,5 = \pm \frac{2\pi}{\frac{5}{0,1}} \sqrt{y_0^2 - 0,1^2}$$

$$2,25 = \frac{4\pi^2}{\frac{4\pi^2}{25}} (y_0^2 - 0,01)$$

$$2,25 = 25 \cdot (y_0^2 - 0,01)$$

$$0,09 = (y_0^2 - 0,01)$$

$$y_0^2 = 0,1$$

$$y_0 = 0,32 \text{ m}$$

(μον. 4)

Β' Τρόπος (Αμέσως μετά την κρούση)

$$E_{\text{μηχαρχ}} = E_{\text{μηχτελ}}$$

$$E_{\text{κιν}} + E_{\epsilon\lambda 2} = E_{\epsilon\lambda 0}$$

$$\frac{1}{2}(m+M)v_k^2 + \frac{1}{2}ky_2^2 = \frac{1}{2}ky_0^2$$

$$(1+3) \cdot (1,5)^2 + 100 \cdot (0,1)^2 = 100 y_0^2$$

$$(4) \cdot (2,25) + 100 \cdot (0,01) = 100 y_0^2$$

$$9 + 1 = 100 y_0^2$$

$$y_0 = 0,32 \text{ m}$$

(μον. 4)

v. τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου σε σχέση με το φυσικό του μήκος,

(μον. 2)

$$d = y_1 + y_2 + y_0$$

$$d = 0,3 + 0,1 + 0,32$$

→

$$d = 0,72 \text{ m}$$

(μον. 2)

γ. Σε ποια θέση η κινητική ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης.

(μον. 4)

$$E_{\text{κιν}} = 3 E_{\text{ελ}}$$

$$\frac{1}{2} (m + M) u^2 = 3 \frac{1}{2} D y^2$$

$$\frac{1}{2} (m + M) \cdot (\omega \sqrt{y_0^2 - y^2})^2 = 3 \frac{1}{2} D y^2$$

$$(m + M) \cdot \omega^2 (y_0^2 - y^2) = 3 D y^2$$

$$D \cdot (y_0^2 - y^2) = 3 D y^2$$

$$(y_0^2 - y^2) = 3 y^2$$

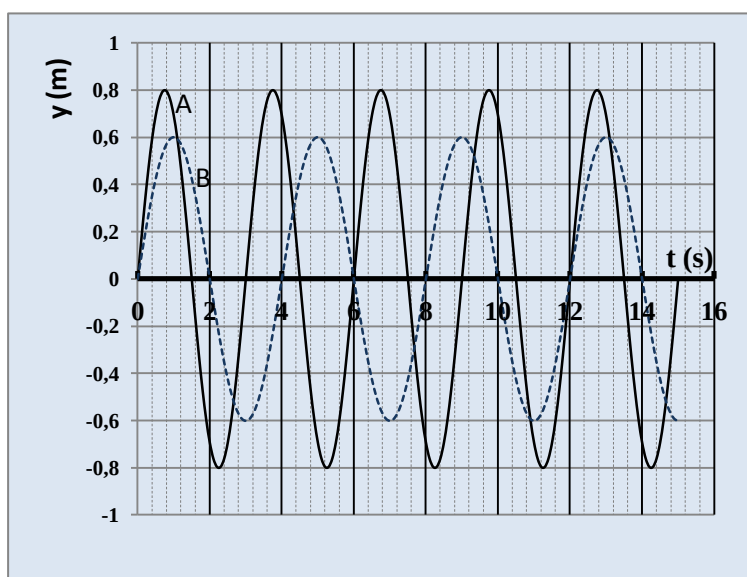
$$y_0^2 = 4 y^2$$

$$y = \pm \frac{y_0}{2} \quad y = \pm \frac{0,32}{2} = \pm 0,16 \text{ m}$$

$$y = \pm 0,16 \text{ m}$$

ΘΕΜΑ 5^ο: (Μονάδες 20)

Στη διπλανή γραφική παράσταση δίνεται η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας σε σχέση με το χρόνο για δύο σώματα Α και Β που έχουν μάζες $m_A = 0,3 \text{ kg}$ και $m_B = 0,4 \text{ kg}$ και τα οποία εκτελούν Απλή Αρμονική Ταλάντωση.



Α. Να προσδιορίσετε, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας, τη χρονική στιγμή, μετά από τη χρονική στιγμή $t = 0$, κατά την οποία:

α. τα δύο σώματα διέρχονται συγχρόνως για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπία με τις ταχύτητες τους να έχουν ίδια φορά, (μον. 1,5)

Τη χρονική στιγμή $t = 12 \text{ s}$ (μον. 0,5)

Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ τα δύο σώματα Α και Β τίθενται σε Α.Α.Τ. από την Θέση ισορροπίας με θετική φορά. Την χρονική στιγμή $t = 12 \text{ s}$ βρίσκονται και πάλι στην Θέση Ισορροπίας με το σώμα Α να εκτελεί τέσσερεις (4) πλήρης ταλαντώσεις ενώ το σώμα Β να εκτελεί τρεις (3) πλήρης ταλαντώσεις. Έτσι θα συνεχίσουν με την ίδια φορά. (μον. 1)

β. τα δύο σώματα διέρχονται συγχρόνως για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπία με τις ταχύτητες τους να έχουν αντίθετη φορά. (μον. 1,5)

Τη χρονική στιγμή $t = 6 \text{ s}$ (μον. 0,5)

Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ τα δύο σώματα Α και Β τίθενται σε Α.Α.Τ. από την Θέση ισορροπίας με θετική φορά. Την χρονική στιγμή $t = 6 \text{ s}$ βρίσκονται και πάλι στην Θέση Ισορροπίας με το σώμα Α να εκτελεί δύο (2) πλήρης ταλαντώσεις ενώ το σώμα Β να εκτελεί μιάμιση ($1\frac{1}{2}$) ταλαντώσεις. Έτσι θα συνεχίσουν αντίθετη φορά. (μον. 1)



B. α. Να υπολογίσετε:

i. το λόγο της μέγιστης ταχύτητας του σώματος A προς τη μέγιστη ταχύτητα του B.

$$\frac{u_{0A}}{u_{0B}} = \frac{\omega_A y_{0A}}{\omega_B y_{0B}} \quad (\text{μον. 2})$$

$$\frac{u_{0A}}{u_{0B}} = \frac{\frac{2\pi}{T_A} y_{0A}}{\frac{2\pi}{T_B} y_{0B}} \quad \frac{u_{0A}}{u_{0B}} = \frac{T_B y_{0A}}{T_A y_{0B}} \quad \frac{u_{0A}}{u_{0B}} = \frac{4,08}{3,06}$$

$$\frac{u_{0A}}{u_{0B}} = \frac{16}{9}$$

ii. το λόγο της κινητικής ενέργειας του A προς την κινητική ενέργεια του B τη χρονική στιγμή $t = 6 \text{ s}$. (μον. 3)

$$\frac{E_{\text{κινA}}}{E_{\text{κινB}}} = \frac{\frac{1}{2} m_A u_A^2}{\frac{1}{2} m_B u_B^2} \quad \frac{E_{\text{κινA}}}{E_{\text{κινB}}} = \frac{0,3}{0,4} \left(\frac{16}{9}\right)^2$$

$$\frac{E_{\text{κινA}}}{E_{\text{κινB}}} = \frac{64}{27}$$

iii. το λόγο της ελαστικής δυναμικής ενέργειας του B προς την κινητική ενέργεια του A τη χρονική στιγμή $t = 5 \text{ s}$. (μον. 4)

$$\frac{E_{\text{ελB}}}{E_{\text{κινA}}} = \frac{\frac{1}{2} k y_B^2}{\frac{1}{2} m_A u_A^2} \quad \frac{E_{\text{ελB}}}{E_{\text{κινA}}} = \frac{\frac{1}{2} m_B \omega_B^2 y_B^2}{\frac{1}{2} m_A u_A^2} \quad \frac{E_{\text{ελB}}}{E_{\text{κινA}}} = \frac{\frac{1}{2} 0,4 \left(\frac{2\pi}{4}\right)^2 (0,6)^2}{\frac{1}{2} 0,3 \left(\frac{4\pi}{15}\right)^2}$$

$$\frac{E_{\text{ελB}}}{E_{\text{κινA}}} = \frac{4 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 \cdot (0,6)^2}{3 \cdot \left(\frac{4}{15}\right)^2} \quad \frac{E_{\text{ελB}}}{E_{\text{κινA}}} = \frac{4 \cdot \left(\frac{4}{16}\right) \cdot (0,36)}{3 \cdot \left(\frac{16}{225}\right)} \quad \frac{E_{\text{ελB}}}{E_{\text{κινA}}} = \frac{36}{\left(\frac{16}{75}\right)} \quad \frac{E_{\text{ελB}}}{E_{\text{κινA}}} = \frac{36}{\left(\frac{16}{3}\right)}$$

$$\frac{E_{\text{ελB}}}{E_{\text{κινA}}} = \frac{27}{16}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 5 \text{ s}$

$$u_A = \omega y_{0A} \sin(\omega t)$$

$$u_A = \frac{2\pi}{T} y_{0A} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

$$u_A = \frac{2\pi}{3} \cdot 0,8 \sin\left(\frac{2\pi}{3} 5\right)$$

$$u_A = \frac{2\pi}{3} \cdot 0,8 \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$u_A = -\frac{4\pi}{15} \frac{m}{s}$$

β. Να χαράξετε στους ίδιους βαθμολογημένους άξονες τις γραφικές παραστάσεις της κινητικής ενέργειας και της ελαστικής δυναμικής ενέργειας σε σχέση με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας για το σώμα Α. (μον. 4)

Το σημείο τομής με τον άξονα της ενέργειας

$$E_{ελΑ} = \frac{1}{2} D y_{oA}^2 \quad E_{ελΑ} = \frac{1}{2} m_A \omega_A^2 y_{oA}^2 \quad E_{ελΑ} = \frac{1}{2} 0,3 \left(\frac{2\pi}{3} \right)^2 (0,8)^2$$

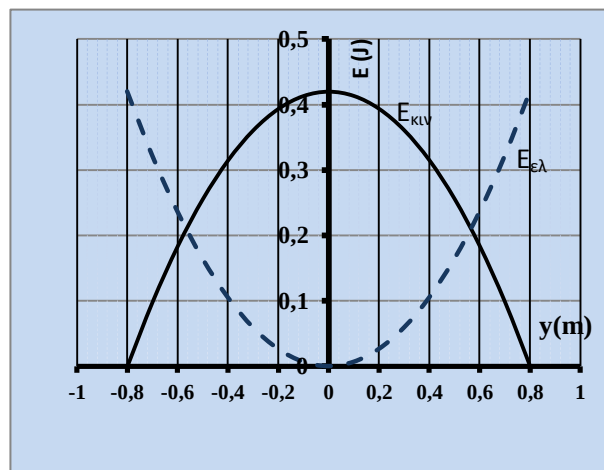
$$E_{ελΑ} = \frac{1}{2} 0,3 \left(\frac{4\pi^2}{9} \right) (0,64)$$

$$E_{ελΑ} = 0,1 \left(\frac{2\pi^2}{3} \right) (0,64)$$

$$E_{ελΑ} = 0,42 J$$

(μον. 1)

Η χάραξη των γραφικών παραστάσεων (μον. 3)



γ. Να χαράξετε στους ίδιους βαθμολογημένους άξονες τις γραφικές παραστάσεις της κινητικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας σε σχέση με το χρόνο για το σώμα Β. (μον. 4)

Το σημείο τομής με τον άξονα της ενέργειας

$$E_{ελΒ} = \frac{1}{2} D y_{oB}^2 \quad E_{ελΒ} = \frac{1}{2} m_B \omega_B^2 y_{oB}^2 \quad E_{ελΒ} = \frac{1}{2} 0,4 \left(\frac{2\pi}{4} \right)^2 (0,6)^2$$

$$E_{ελΒ} = \frac{1}{2} 0,4 \left(\frac{4\pi^2}{16} \right) (0,36)$$

$$E_{ελΒ} = 0,018\pi^2$$

$$E_{ελΒ} = 0,177 J$$

(μον. 1)

Η χάραξη των γραφικών παραστάσεων (μον. 3)

