

ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

24^Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (Επαναληπτικός Διαγωνισμός)

Κυριακή, 25 Απριλίου, 2010,

Ώρα: 11.00 - 14.00

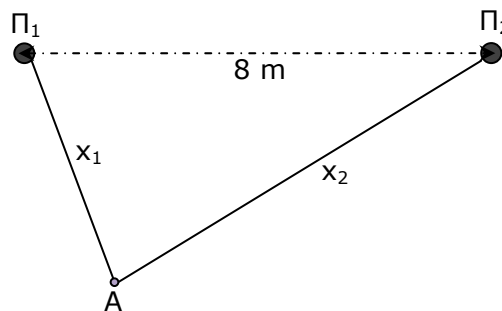


Οδηγίες:

- 1) Το δοκίμιο αποτελείται από έξι (6) θέματα.
- 2) Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
- 3) Επιτρέπεται η χρήση μόνο μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
- 4) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- 5) Επιτρέπεται η χρήση μπλε ή μαύρου μελανιού μόνο.
- 6) Δίνεται: $g=10\text{m/s}^2$, $\pi=3,14$. Για ελαστική κρούση μεταξύ δύο σωμάτων: $u_1+v_1=u_2+v_2$.

Άσκηση 1 (10 μονάδες)

Δύο σύγχρονες πηγές, Π_1 και Π_2 , που απέχουν μεταξύ τους απόσταση 8m, εκπέμπουν εγκάρσια αρμονικά κύματα σε επιφάνεια υγρού με ταχύτητα διάδοσης 20m/s. Η εξίσωση ταλάντωσης των πηγών είναι $y=0,4\mu(20\pi t)$, (μονάδες στο S.I.)

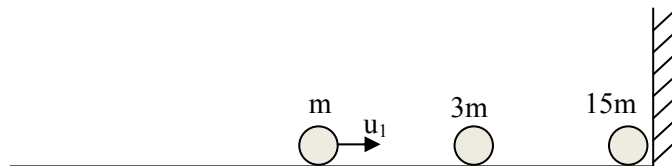


Το υλικό σημείο A απέχει από την πηγή Π_1 απόσταση $x_1=4\text{m}$ και από την πηγή Π_2 απόσταση $x_2 > x_1$. Τα δύο κύματα φτάνουν από τις πηγές τους στο σημείο A με χρονική καθυστέρηση $\Delta t=0,2\text{s}$.

- α) Να διερευνήσετε το αποτέλεσμα της συμβολής στο σημείο A.
- β) Να υπολογίσετε την απόσταση x_2 .
- γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της μετατόπισης y του A από το σημείο ισορροπίας του, ως συνάρτηση του χρόνου t , για το διάστημα: $0 \leq t \leq 0,6\text{s}$.
- δ) Να υπολογίσετε τον αριθμό των υλικών σημείων που εκτελούν ταλάντωση με πλάτος 0,8m και βρίσκονται μεταξύ των πηγών πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$.
- ε) Να υπολογίσετε την ταχύτητα ταλάντωσης του υλικού σημείου A τη χρονική στιγμή $t=0,45\text{s}$.
- στ) Σε αυτό το ερώτημα θεωρήστε ότι η πηγή Π_1 εκτελεί ταλάντωση σύμφωνα με την εξίσωση $y_{\pi 1}=0,4\mu(20\pi t+\pi)$ και η πηγή Π_2 σύμφωνα με την εξίσωση $y_{\pi 2}=0,4\mu(20\pi t)$. Να εξηγήσετε το αποτέλεσμα της συμβολής στο ίδιο υλικό σημείο A.

Άσκηση 2 (15 μονάδες)

Τρεις σφαίρες είναι αρχικά ακίνητες πάνω σε οριζόντιο επίπεδο που δεν παρουσιάζει τριβές, έτσι ώστε τα κέντρα μάζας τους να βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία. Οι μάζες των τριών σφαιρών είναι m , $3m$ και $15m$ αντίστοιχα. Η τρίτη σφαίρα, μάζας $15m$, είναι σχεδόν σε επαφή με κατακόρυφο ακλόνητο τοίχωμα. Δίνουμε στο κέντρο μάζας της πρώτης σφαίρας, μάζας m , οριζόντια ταχύτητα μέτρου u_1 με κατεύθυνση προς τη δεύτερη σφαίρα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Όλες οι κρούσεις μεταξύ των σφαιρών και μεταξύ της τρίτης σφαίρας και του τοιχώματος να θεωρηθούν μετωπικές και εντελώς ελαστικές.



Να υπολογίσετε:

- Τις τελικές ταχύτητες των τριών σφαιρών, ως συνάρτηση της u_1 .
- Το κλάσμα της κινητικής ενέργειας της πρώτης σφαίρας m που μεταφέρεται
 - στη δεύτερη και
 - στην τρίτη σφαίρα.

Άσκηση 3 (15 μονάδες)

Ένα σώμα μάζας 2kg , ενώ αρχικά είναι ακίνητο πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, αρχίζει να δέχεται την επίδραση οριζόντιας δύναμης F που το μέτρο της σε συνάρτηση με τον χρόνο t μεταβάλλεται όπως δείχνει η γραφική παράσταση.

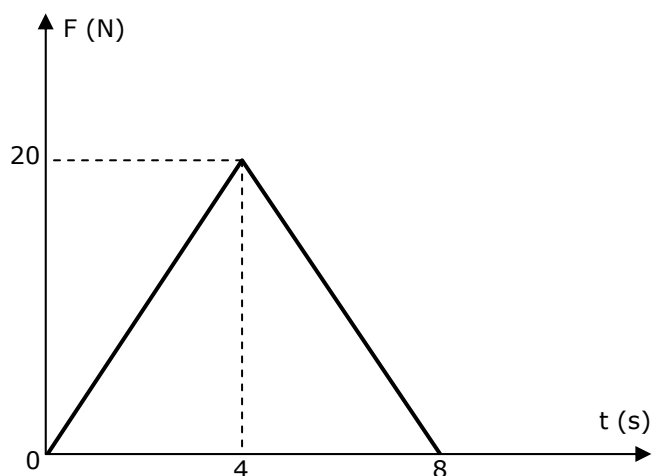
Ο συντελεστής στατικής τριβής είναι ίσος με το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του επιπέδου, που είναι $\mu=0,5$.

α) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση, σε βαθμολογημένους άξονες, της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα ως συνάρτηση του χρόνου.

β) Να εξηγήσετε σε ποια χρονική στιγμή το σώμα αποκτά μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα.

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη ταχύτητα που αποκτά το σώμα.

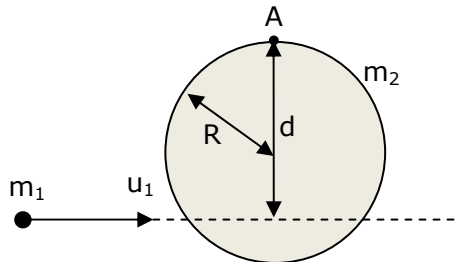
δ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος την χρονική στιγμή $t=8\text{s}$.



Άσκηση 4 (20 μονάδες)

Ένα μικρό σφαιρίδιο μάζας m_1 κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $u_1=1\text{m/s}$ όταν κτυπά την επιφάνεια ενός ομογενούς δίσκου μάζας m_2 και ακτίνας $R=0,5\text{m}$. Ο δίσκος, ο οποίος είναι αρχικά ακίνητος, μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, χωρίς τριβές, από το σταθερό σημείο Α της περιφέρειας του. Η ροπή αδράνειας του δίσκου, ως προς το Α, είναι $I_A=1,5m_2R^2$.

Η κρούση γίνεται ακαριαία, και το σημείο κρούσης απέχει απόσταση $d=0,75\text{m}$ από το σημείο Α, όπως δείχνει το σχήμα. Αμέσως μετά την κρούση το σφαιρίδιο ακινητοποιείται (σταματά και πέφτει) και όλη η κινητική ενέργειά του μεταφέρεται στο δίσκο.



α) Να υπολογίσετε το λόγο m_2/m_1 .

β) Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα του δίσκου, ως προς το Α, αμέσως μετά την κρούση.

γ) Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος που ανεβαίνει το κέντρο μάζας του δίσκου, μετά την κρούση.

δ) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας που θα πρέπει να είχε το σφαιρίδιο για να προκαλούσε περιστροφή του δίσκου τουλάχιστο 180 μοίρες, γύρω από το Α.

Άσκηση 5 (20 μονάδες)

Στη διάταξη του σχήματος το σώμα μάζας m ισορροπεί αρχικά στη μια άκρη αβαρούς νήματος. Η άλλη άκρη του νήματος είναι συνδεδεμένη με το άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς K το οποίο στερεώνεται στο άλλο άκρο σε ακλόνητη οριζόντια επιφάνεια. Το νήμα περνά γύρω από την περιφέρεια ενός δίσκου.

Ο δίσκος είναι ομογενής και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το κέντρο του σε κατακόρυφο επίπεδο. Έχει ακτίνα R και ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο του, I .

Αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο και το ελατήριο έχει επιμήκυνση y_1 .

Θεωρήστε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής βαρυτικής ενέργειας το αρχικό οριζόντιο επίπεδο στο οποίο ισορροπεί το σώμα m . Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g .

Απομακρύνουμε κατακόρυφα το σώμα m προς τα κάτω κατά y_0 , από την αρχική του θέση ισορροπίας, και αμέσως μετά το αφήνουμε ελεύθερο. Σε μια τυχαία θέση y από τη θέση ισορροπίας το σώμα m κινείται με γραμμική ταχύτητα μέτρου u και ο δίσκος περιστρέφεται γύρω από το κέντρο του με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω . Το νήμα παραμένει συνεχώς τεντωμένο. Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται.

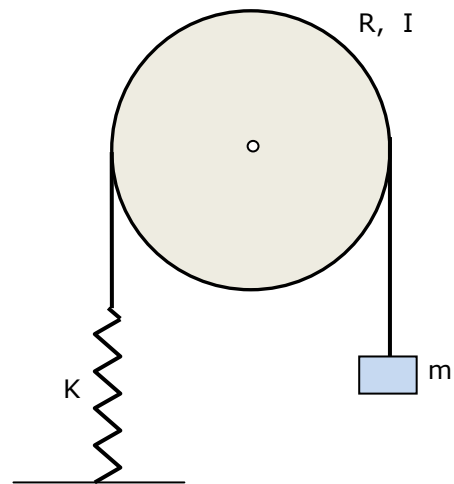
α) Να γράψετε τη σχέση που δίνει την αρχική μηχανική ενέργεια του συστήματος, E_{M1} , ως συνάρτηση του K και του y_1 .

β) Να εξάγετε τη σχέση που δίνει τη μηχανική ενέργεια του συστήματος, E_{M2} , στην τυχαία θέση y , ως συνάρτηση των μεγεθών: K , y , m , u , I , R και g .

γ) Να προσδιορίσετε τη διαφορά της μηχανικής ενέργειας $\Delta E=E_{M2}-E_{M1}$. Τι εκφράζει αυτή η διαφορά;

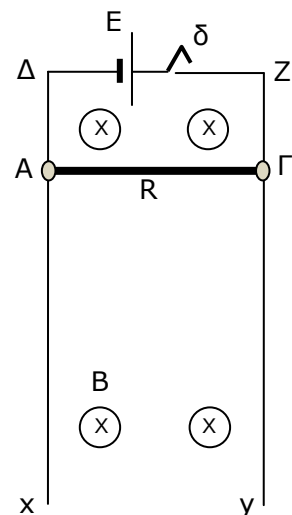
δ) Να δείξετε ότι η κίνηση του σώματος m είναι απλή αρμονική ταλάντωση.

ε) Να προσδιορίσετε: i) τη σταθερά της ταλάντωσης και ii) την περίοδο, ως συνάρτηση των μεγεθών: K , m , I και R .



Άσκηση 6 (20 μονάδες)

Στο σχήμα η οριζόντια αγωγίμη ράβδος ΑΓ έχει μάζα $m=0,05\text{kg}$, μήκος $ΑΓ=0,5\text{m}$, ωμική αντίσταση $R=20\Omega$ και μπορεί να εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση, χωρίς τριβές, με τα άκρα της Α και Γ συνεχώς σε επαφή πάνω στα κατακόρυφα καλώδια Δx και Ζy τα οποία είναι πολύ μεγάλου μήκους και έχουν αμελητέα αντίσταση. Τα άκρα Δ και Ζ συνδέονται με ηλεκτρική πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης $E=12\text{V}$ και αμελητέας εσωτερικής αντίστασης και με ένα διακόπτη δ. Το κύκλωμα βρίσκεται μέσα σε οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου $B=2\text{T}$. Αρχικά η ράβδος κρατείται ακίνητη. Με το διακόπτη ανοικτό αφήνουμε τη ράβδο να κινηθεί από την ηρεμία τη χρονική στιγμή $t=0$. Τη χρονική στιγμή $t=1\text{s}$, κλείνουμε το διακόπτη.



- α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα της ράβδου τη στιγμή $t=1\text{s}$.
- β) Να υπολογίσετε την επαγωγική τάση στα άκρα της ράβδου τη χρονική στιγμή $t=1\text{s}$ και να εξηγήσετε την πολικότητά της.
- γ) Να υπολογίσετε το ρεύμα στο βρόχο τη χρονική στιγμή $t=1\text{s}$.
- δ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα της ράβδου τη στιγμή που το ρεύμα στο βρόχο γίνεται μηδέν.
- ε) Σε κάποια στιγμή η ράβδος αποκτά οριακή ταχύτητα. Να υπολογίσετε την οριακή ταχύτητα.
- στ) Να υπολογίσετε το ρεύμα στο βρόχο όταν η ράβδος κινείται με την οριακή ταχύτητα.
- ζ) Κατά τη διάρκεια που η ράβδος κινείται με την οριακή ταχύτητα, να αποδείξετε ότι διατηρείται η ενέργεια στο σύστημα.

ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ



24^Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (Επαναληπτικός Διαγωνισμός)

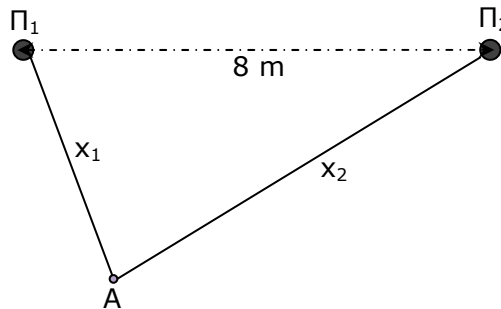
Κυριακή, 25 Απριλίου, 2010,

Ώρα: 11.00 - 14.00

Προτεινόμενες Λύσεις

Άσκηση 1 (15 μονάδες)

Δύο σύγχρονες πηγές, Π_1 και Π_2 , που απέχουν μεταξύ τους απόσταση 8m, εκπέμπουν εγκάρσια αρμονικά κύματα σε επιφάνεια υγρού με ταχύτητα διάδοσης 20m/s. Η εξίσωση ταλάντωσης των πηγών είναι $y=0,4\mu(20\pi t)$, (μονάδες στο S.I.)



Το υλικό σημείο A απέχει από την πηγή Π_1 απόσταση $x_1=4\text{m}$ και από την πηγή Π_2 απόσταση $x_2 > x_1$. Τα δύο κύματα φτάνουν από τις πηγές τους στο σημείο A με χρονική καθυστέρηση $\Delta t=0,2\text{s}$.

α) Να διερευνήσετε το αποτέλεσμα της συμβολής στο σημείο A.

β) Να υπολογίσετε την απόσταση x_2 .

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της μετατόπισης y του A από το σημείο ισορροπίας του, ως συνάρτηση του χρόνου t , για το διάστημα: $0 \leq t \leq 0,6\text{s}$.

δ) Να υπολογίσετε τον αριθμό των υλικών σημείων που εκτελούν ταλάντωση με πλάτος 0,8m και βρίσκονται μεταξύ των πηγών πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$.

ε) Να υπολογίσετε την ταχύτητα ταλάντωσης του υλικού σημείου A τη χρονική στιγμή $t=0,45\text{s}$.

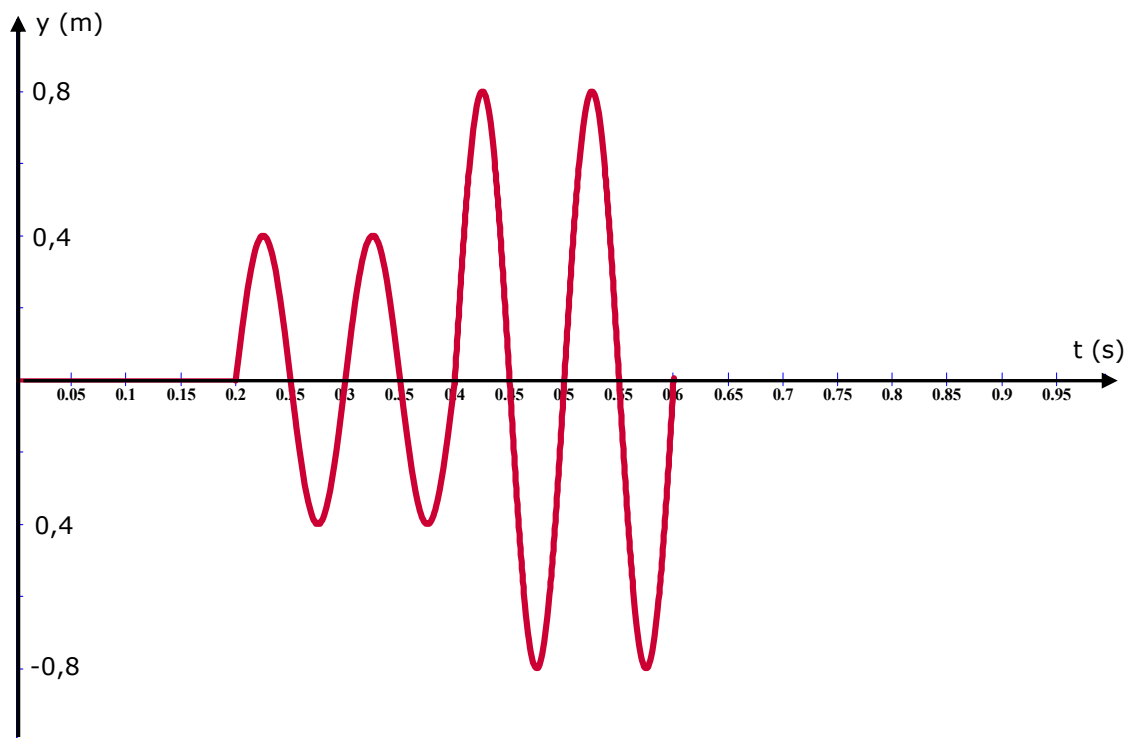
στ) Σε αυτό το ερώτημα θεωρήστε ότι η πηγή Π_1 εκτελεί ταλάντωση σύμφωνα με την εξίσωση $y_{\pi 1}=0,4\mu(20\pi t+\pi)$ και η πηγή Π_2 σύμφωνα με την εξίσωση $y_{\pi 2}=0,4\mu(20\pi t)$. Να εξηγήσετε το αποτέλεσμα της συμβολής στο ίδιο υλικό σημείο A.

Λύση

α) Είναι $\omega = 20\pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 0,1 \text{ s}$. Επομένως η χρονική καθυστέρηση που φτάνουν τα κύματα στο Α, δηλαδή 0,2s, είναι $2T$. Για σύγχρονες πηγές αυτή η χρονική καθυστέρηση δημιουργεί στο Α, λόγω συμβολής, πλήρη ενίσχυση, εφόσον τα κύματα φτάνουν σε φάση. **(2 μον.)**

β) Είναι $\Delta x = 2\lambda$. Το μήκος κύματος υπολογίζεται από τη σχέση: $u = \lambda f$. Άρα, $20 = 10\lambda \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$. Επομένως, $\Delta x = 4 \text{ m}$. Τελικά, $x_2 - x_1 = 4 \text{ m} \Rightarrow x_2 - 4 = 4 \text{ m} \Rightarrow x_2 = 8 \text{ m}$. **(2 μον.)**

γ) Το πρώτο κύμα φτάνει στο υλικό σημείο Α τη χρονική στιγμή $t = \frac{4}{20} = 0,2 \text{ s}$. Το δεύτερο κύμα τη χρονική στιγμή $t = \frac{8}{20} = 0,4 \text{ s}$. Επομένως το υλικό σημείο Α εκτελεί ακριβώς 2 ταλαντώσεις πλάτους 0,4m, τη στιγμή που φτάνει το δεύτερο κύμα. Ακολούθως εκτελεί ταλάντωση με πλάτος 0,8m, εφόσον έχουμε πλήρη ενίσχυση. **(3 μον.)**



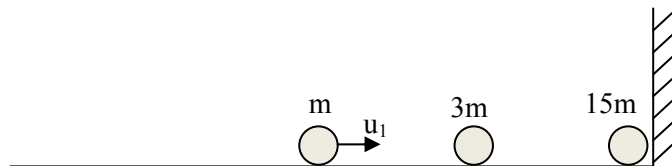
δ) Για τα σημεία που εκτελούν ταλάντωση με πλάτος 0,8m έχουμε πλήρη ενίσχυση. Είναι οι κοιλίες στο στάσιμο κύμα που δημιουργείται μεταξύ των πηγών. Η απόσταση μεταξύ διαδοχικών κοιλιών είναι $\lambda/2$. Άρα, με σημείο αναφοράς την πηγή Π₁ ($x=0$) οι κοιλίες βρίσκονται στις θέσεις, 1m, 2m, 3m, 4m, 5m, 6m και 7m. Άρα ο αριθμός των υλικών σημείων που εκτελούν ταλάντωση με μέγιστο πλάτος, 0,8m, είναι 7. **(3 μον.)**

ε) Τη χρονική στιγμή $t=0,45\text{s}$ το υλικό σημείο Α περνά από τη θέση ισορροπίας. Άρα η ταχύτητα ταλάντωσης είναι κατά μέτρο, $u_{\text{ταλ}} = \frac{2\pi}{T}(2y_0) = \frac{2\pi}{0,1}(0,8) = 16\pi \text{ m/s}$. **(2 μον.)**

στ) Εφόσον τώρα οι πηγές εκτελούν ταλάντωση με αντίθετη φάση, τα κύματα φτάνουν στο υλικό σημείο Α με αντίθετη φάση και έχουμε ως αποτέλεσμα πλήρη απόσβεση. **(3 μον.)**

Άσκηση 2 (10 μονάδες)

Τρεις σφαίρες είναι αρχικά ακίνητες πάνω σε οριζόντιο επίπεδο που δεν παρουσιάζει τριβές, έτσι ώστε τα κέντρα μάζας τους να βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία. Οι μάζες των τριών σφαιρών είναι m , $3m$ και $15m$ αντίστοιχα. Η τρίτη σφαίρα, μάζας $15m$, είναι σχεδόν σε επαφή με κατακόρυφο ακλόνητο τοίχωμα. Δίνουμε στο κέντρο μάζας της πρώτης σφαίρας, μάζας m , οριζόντια ταχύτητα μέτρου u_1 με κατεύθυνση προς τη δεύτερη σφαίρα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Όλες οι κρούσεις μεταξύ των σφαιρών και μεταξύ της τρίτης σφαίρας και του τοιχώματος να θεωρηθούν μετωπικές και εντελώς ελαστικές.



Να υπολογίσετε:

- α)** Τις τελικές ταχύτητες των τριών σφαιρών, ως συνάρτηση της u_1 .
β) Το κλάσμα της κινητικής ενέργειας της πρώτης σφαίρας m που μεταφέρεται
(i) στη δεύτερη και **(ii)** στην τρίτη σφαίρα.

Λύση

α) Ισχύει η διατήρηση της ορμής και της κινητικής ενέργειας, πριν και μετά την κρούση:

Για την πρώτη κρούση: $mu_1 = mv_1 + 3mv_2 \Rightarrow u_1 = v_1 + 3v_2$.

Από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας και ορμής: $u_1 + v_1 = v_2$. Η λύση του συστήματος των δύο εξισώσεων δίνει: $v_1 = -\frac{u_1}{2}$, (προς τα αριστερά), $v_2 = +\frac{u_1}{2}$ (προς τα δεξιά).

Για τη δεύτερη κρούση έχουμε: $\frac{3mu_1}{2} = 3mv_2 + 15mv_3$, και $\frac{u_1}{2} + v_2' = v_3$. Από τη λύση του συστήματος παίρνουμε: $v_2' = -\frac{u_1}{3}$ (προς τα αριστερά), και $v_3 = +\frac{u_1}{6}$ (προς τα δεξιά). Η τρίτη σφαίρα αμέσως μετά την ελαστική κρούση με το κατακόρυφο τοίχωμα κινείται με ταχύτητα $-\frac{u_1}{6}$ (προς τα αριστερά). Δεν συμβαίνει άλλη κρούση μεταξύ των σφαιρών.

(6 μον.)

β) (i) Το κλάσμα της αρχικής ενέργειας που μεταφέρεται στη δεύτερη σφαίρα

$$\text{είναι: } \frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{1}{2}3mv_2'^2}{\frac{1}{2}mu_1^2} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{1}{2}3m\frac{u_1^2}{9}}{\frac{1}{2}mu_1^2} = \frac{18}{18} = \frac{1}{3}$$

(2 μον.)

(ii) Το κλάσμα της αρχικής ενέργειας που μεταφέρεται στην τρίτη σφαίρα

$$\text{είναι: } \frac{E_3}{E_1} = \frac{\frac{1}{2}15mv_3^2}{\frac{1}{2}mu_1^2} = \frac{\frac{1}{2}15m\frac{u_1^2}{36}}{\frac{1}{2}mu_1^2} = \frac{15}{72} = \frac{5}{12}$$

(2 μον.)

Άσκηση 3 (15 μονάδες)

Ένα σώμα μάζας 2kg, ενώ αρχικά είναι ακίνητο πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, αρχίζει να δέχεται την επίδραση οριζόντιας δύναμης F που το μέτρο της σε συνάρτηση με τον χρόνο t μεταβάλλεται όπως δείχνει η γραφική παράσταση.

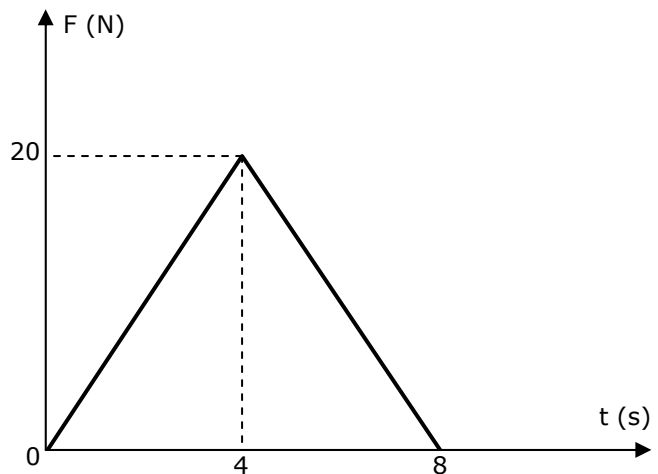
Ο συντελεστής στατικής τριβής είναι ίσος με το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του επιπέδου, που είναι $\mu=0,5$.

α) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση, σε βαθμολογημένους άξονες, της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα ως συνάρτηση του χρόνου.

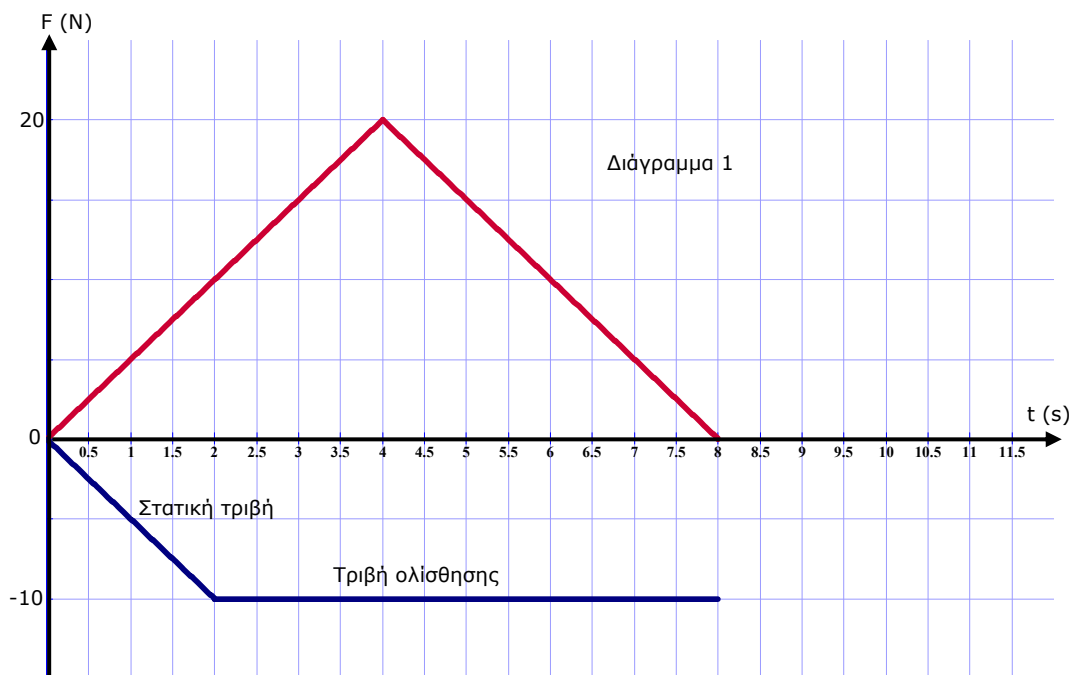
β) Να εξηγήσετε σε ποια χρονική στιγμή το σώμα αποκτά μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα.

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη ταχύτητα που αποκτά το σώμα.

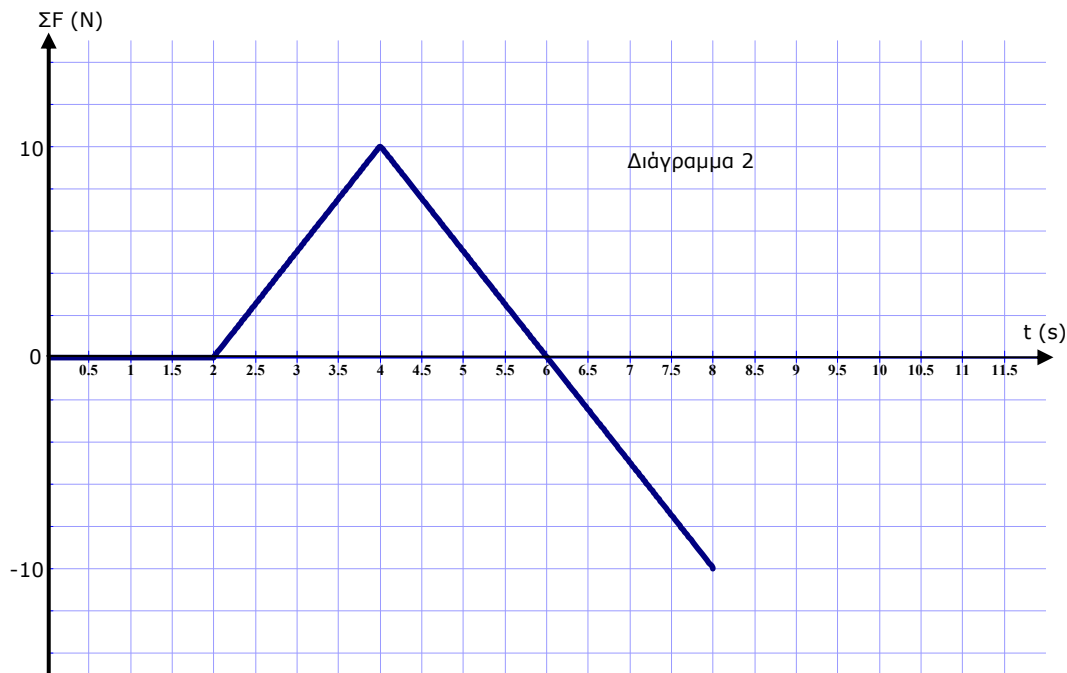
δ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος την χρονική στιγμή $t=8s$.

**Λύση**

α) Η συνισταμένη δύναμη είναι αποτέλεσμα της επίδρασης της δύναμης F και της τριβής. Η στατική τριβή αυξάνεται με την αύξηση της F μέχρις ότου φτάσει τη μέγιστη τιμή της, οπότε το σώμα αρχίζει να ολισθαίνει και η τριβή ολίσθησης είναι πλέον σταθερή. Στο διάγραμμα 1 φαίνεται η δύναμη F και η τριβή (στατική και ολίσθησης).



Στο διάγραμμα 2 φαίνεται η συνισταμένη των δύο δυνάμεων, ως αποτέλεσμα των δύο δυνάμεων του διαγράμματος 1. (5 μον.)



β) Το σώμα αποκτά μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t=6s$, δηλαδή τη στιγμή που η συνισταμένη δύναμη αλλάζει φορά και γίνεται αντίθετη της φοράς της ταχύτητας, οπότε το σώμα θα επιβραδύνεται. (4 μον.)

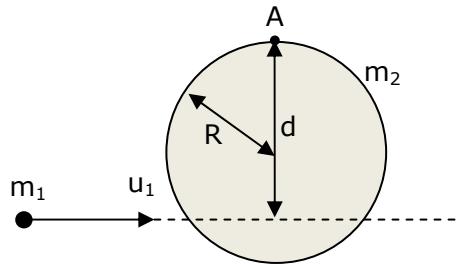
γ) Το εμβαδό της γραφικής παράστασης στο διάγραμμα 2 μέχρι το 6^ο δευτερόλεπτο, είναι ίσο με τη μεταβολή της ορμής. Είναι: $\Delta p = m(u_{\text{τελ}} - u_{\text{αρχ}}) \Rightarrow 20 = 2(u - 0) \Rightarrow u = 10 \text{ m/s}$. (3 μον.)

δ) Από το εμβαδό της γραφικής παράστασης στο διάγραμμα 2 μέχρι το 8^ο δευτερόλεπτο: $\Delta p = m(u_{\text{τελ}} - u_{\text{αρχ}}) \Rightarrow 10 = 2(u - 0) \Rightarrow u = 5 \text{ m/s}$. (3 μον.)

Άσκηση 4 (20 μονάδες)

Ένα μικρό σφαιρίδιο μάζας m_1 κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $u_1=1\text{m/s}$ όταν κτυπά την επιφάνεια ενός ομογενούς δίσκου μάζας m_2 και ακτίνας $R=0,5\text{m}$. Ο δίσκος, ο οποίος είναι αρχικά ακίνητος, μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, χωρίς τριβές, από το σταθερό σημείο Α της περιφέρειας του. Η ροπή αδράνειας του δίσκου, ως προς το Α, είναι $I_A=1,5m_2R^2$.

Η κρούση γίνεται ακαριαία, και το σημείο κρούσης απέχει απόσταση $d=0,75\text{m}$ από το σημείο Α, όπως δείχνει το σχήμα. Αμέσως μετά την κρούση το σφαιρίδιο ακινητοποιείται (σταματά και πέφτει) και όλη η κινητική ενέργειά του μεταφέρεται στο δίσκο.



α) Να υπολογίσετε το λόγο m_2/m_1 .

β) Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα του δίσκου, ως προς το Α, αμέσως μετά την κρούση.

γ) Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος που ανεβαίνει το κέντρο μάζας του δίσκου, μετά την κρούση.

δ) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας που θα πρέπει να είχε το σφαιρίδιο για να προκαλούσε περιστροφή του δίσκου τουλάχιστο 180 μοίρες, γύρω από το Α.

Λύση

α) Αρχή διατήρησης της στροφορμής:

$$\vec{L}_{\text{αρχ., συστ.}} = \vec{L}_{\text{τελ., συστ.}} \Rightarrow m_1 u_1 d = I \omega \Rightarrow \omega = \frac{m_1 u_1 d}{I} \Rightarrow \omega = \frac{2m_1 u_1 d}{3m_2 R^2}.$$

Αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} \frac{3}{2} m_2 R^2 \omega^2 \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} \frac{3}{2} m_2 R^2 \frac{4m_1^2 u_1^2 d^2}{9m_2^2 R^4}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{2m_1 d^2}{3m_2 R^2} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{2d^2}{3R^2} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{2}{3} \frac{9}{16} \frac{4}{1} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{3}{2}. \quad (8 \text{ μον.})$$

$$\beta) \omega = \frac{2m_1 u_1 d}{3m_2 R^2} = \frac{2}{3} \frac{2}{3} \frac{3}{4} \frac{4}{1} = \frac{4}{3} \text{ rad/s}. \quad (3 \text{ μον.})$$

γ) Η μηχανική ενέργεια διατηρείται: $\frac{1}{2} I \omega^2 = m_2 g h$ ή

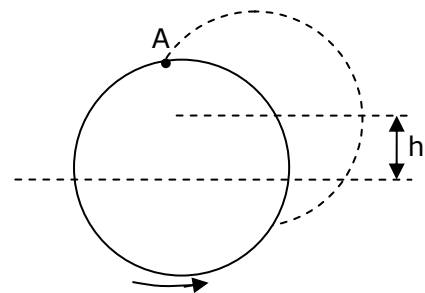
$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = m_2 g h \Rightarrow h = \frac{m_1 u_1^2}{2m_2 g} \Rightarrow h = \frac{1}{20} \frac{2}{3} = \frac{1}{30} \text{ m} = 0,033 \text{ m}.$$

(4 μον.)

δ) Αρχή διατήρησης της ενέργειας για $h=2R$:

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = m_2 g 2R \Rightarrow u_1^2 = \frac{4m_2 g R}{m_1}$$

$$\Rightarrow u_1 = 2 \sqrt{\frac{m_2 g R}{m_1}} = 2 \sqrt{\frac{15}{2}} = \sqrt{30} \text{ m/s} = 5,48 \text{ m/s}. \quad (5 \text{ μον.})$$



Άσκηση 5 (20 μονάδες)

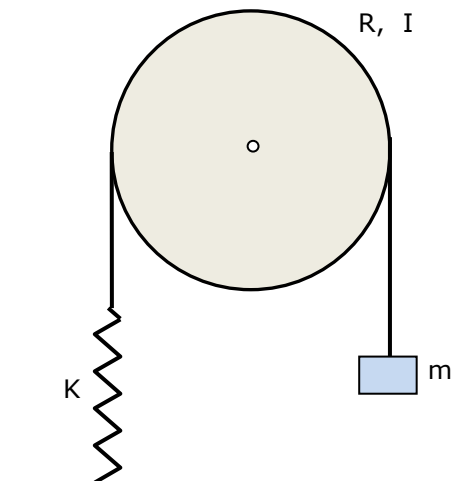
Στη διάταξη του σχήματος το σώμα μάζας m ισορροπεί αρχικά στη μια άκρη αβαρούς νήματος. Η άλλη άκρη του νήματος είναι συνδεδεμένη με το άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς K το οποίο στερεώνεται στο άλλο άκρο σε ακλόνητη οριζόντια επιφάνεια. Το νήμα περνά γύρω από την περιφέρεια ενός δίσκου.

Ο δίσκος είναι ομογενής και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το κέντρο του σε κατακόρυφο επίπεδο. Έχει ακτίνα R και ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο του, I .

Αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο και το ελατήριο έχει επιμήκυνση y_1 .

Θεωρήστε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής βαρυτικής ενέργειας το αρχικό οριζόντιο επίπεδο στο οποίο ισορροπεί το σώμα m . Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g .

Απομακρύνουμε κατακόρυφα το σώμα m προς τα κάτω κατά y_0 , από την αρχική του θέση ισορροπίας, και αμέσως μετά το αφήνουμε ελεύθερο. Σε μια τυχαία θέση y από τη θέση ισορροπίας το σώμα m κινείται με γραμμική ταχύτητα μέτρου u και ο δίσκος περιστρέφεται γύρω από το κέντρο του με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω . Το νήμα παραμένει συνεχώς τεντωμένο. Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται.



α) Να γράψετε τη σχέση που δίνει την αρχική μηχανική ενέργεια του συστήματος, E_{M1} , ως συνάρτηση του K και του y_1 .

β) Να εξάγετε τη σχέση που δίνει τη μηχανική ενέργεια του συστήματος, E_{M2} , στην τυχαία θέση y , ως συνάρτηση των μεγεθών: K , y , m , u , I , R και g .

γ) Να προσδιορίσετε τη διαφορά της μηχανικής ενέργειας $\Delta E = E_{M2} - E_{M1}$. Τι εκφράζει αυτή η διαφορά;

δ) Να δείξετε ότι η κίνηση του σώματος m είναι απλή αρμονική ταλάντωση.

ε) Να προσδιορίσετε: **i)** τη σταθερά της ταλάντωσης και **ii)** την περίοδο, ως συνάρτηση των μεγεθών: K , m , I και R .

Λύση

α) Η αρχική μηχανική ενέργεια του συστήματος, E_{M1} , είναι μόνο η δυναμική ελαστική ενέργεια του ελατηρίου. Άρα, $E_{M1} = \frac{1}{2} K y_1^2$. (2 μον.)

β) Στη θέση y , έστω κάτω από το σημείο ισορροπίας, έχουμε για τη μηχανική ενέργεια του συστήματος:

$$E_{M2} = \frac{1}{2} K (y_1 + y)^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m u^2 - m g y \Rightarrow E_{M2} = \frac{1}{2} K y_1^2 + \frac{1}{2} K y^2 + K y_1 y + \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m u^2 - m g y$$

Είναι: $\omega = \frac{u}{R}$ και $m g = K y_1$. Άρα, $E_{M2} = \frac{m^2 g^2}{2 K} + \frac{1}{2} K y^2 + \frac{1}{2} I \frac{u^2}{R^2} + \frac{1}{2} m u^2$. (4 μον.)

γ) $\Delta E = E_{M2} - E_{M1} = \frac{1}{2} K y^2 + \frac{1}{2} I \frac{u^2}{R^2} + \frac{1}{2} m u^2$. (2 μον.)

Η ενέργεια αυτή είναι η μηχανική ενέργεια της ταλάντωσης του συστήματος, δηλαδή η ενέργεια που προσφέρθηκε στο αρχικά ακίνητο σύστημα για να εκτελέσει ταλάντωση. (2 μον.)

δ) Η ενέργεια E παραμένει σταθερή κατά την ταλάντωση του σώματος. Άρα η πρώτη παράγωγος της ενέργειας ως προς το χρόνο είναι μηδέν. Άρα, $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} K 2 y \frac{dy}{dt} + \frac{I}{2 R^2} 2 u \frac{du}{dt} + \frac{m}{2} 2 u \frac{du}{dt}$.

Είναι, $\frac{dy}{dt} = u$ και $\frac{du}{dt} = a$. Άρα, $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} K 2 y u + \frac{I}{2 R^2} 2 u a + \frac{m}{2} 2 u a$. Εφόσον $\frac{dE}{dt} = 0$, έχουμε,



$$0 = u(Ky + \frac{I}{R^2}a + ma) \Rightarrow 0 = Ky + \frac{I}{R^2}a + ma \Rightarrow a(\frac{I}{R^2} + m) = -Ky \Rightarrow a = -\frac{K}{\frac{I}{R^2} + m}y.$$

Η συνισταμένη δύναμη στο σώμα είναι άρα, $\Sigma F = ma \Rightarrow \Sigma F = -\frac{Km}{\frac{I}{R^2} + m}y.$ (5 μον.)

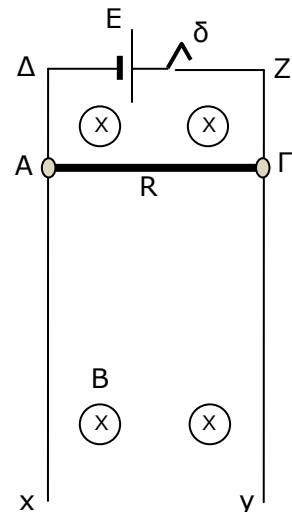
Η σχέση αυτή ικανοποιεί τη συνθήκη $\Sigma F = -Dy$ για απλή αρμονική ταλάντωση.

ε) i) Η σταθερά της ταλάντωσης είναι: $D = \frac{Km}{\frac{I}{R^2} + m}.$ (2 μον.)

ii) Είναι, $D = m\omega^2 = m\frac{4\pi^2}{T^2}.$ Άρα, $\frac{Km}{\frac{I}{R^2} + m} = m\frac{4\pi^2}{T^2} \Rightarrow \frac{K}{\frac{I}{R^2} + m} = \frac{4\pi^2}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{I}{R^2} + m}{K}}.$ (3 μον.)

Άσκηση 6 (20 μονάδες)

Στο σχήμα η οριζόντια αγωγίμη ράβδος ΑΓ έχει μάζα $m=0,05\text{kg}$, μήκος $ΑΓ=0,5\text{m}$, ωμική αντίσταση $R=20\Omega$ και μπορεί να εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση, χωρίς τριβές, με τα άκρα της Α και Γ συνεχώς σε επαφή πάνω στα κατακόρυφα καλώδια Δχ και Ζγ τα οποία είναι πολύ μεγάλου μήκους και έχουν αμελητέα αντίσταση. Τα άκρα Δ και Ζ συνδέονται με ηλεκτρική πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης $E=12\text{V}$ και αμελητέας εσωτερικής αντίστασης και με ένα διακόπτη δ. Το κύκλωμα βρίσκεται μέσα σε οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου $B=2\text{T}$. Αρχικά η ράβδος κρατείται ακίνητη. Με το διακόπτη ανοικτό αφήνουμε τη ράβδο να κινηθεί από την ηρεμία τη χρονική στιγμή $t=0$. Τη χρονική στιγμή $t=1\text{s}$, κλείνουμε το διακόπτη.



- Να υπολογίσετε την ταχύτητα της ράβδου τη στιγμή $t=1\text{s}$.
- Να υπολογίσετε την επαγωγική τάση στα άκρα της ράβδου τη χρονική στιγμή $t=1\text{s}$ και να εξηγήσετε την πολικότητά της.
- Να υπολογίσετε το ρεύμα στο βρόχο τη χρονική στιγμή $t=1\text{s}$.
- Να υπολογίσετε την ταχύτητα της ράβδου τη στιγμή που το ρεύμα στο βρόχο γίνεται μηδέν.
- Σε κάποια στιγμή η ράβδος αποκτά οριακή ταχύτητα. Να υπολογίσετε την οριακή ταχύτητα.
- Να υπολογίσετε το ρεύμα στο βρόχο όταν η ράβδος κινείται με την οριακή ταχύτητα.
- Κατά τη διάρκεια που η ράβδος κινείται με την οριακή ταχύτητα, να αποδείξετε ότι διατηρείται η ενέργεια στο σύστημα.

Λύση

α) Ο αγωγός εκτελεί ελεύθερη πτώση: $u = gt \Rightarrow u = 10 \frac{m}{s}$ (2 μον.)

β) $E_{επ} = Bu\ell = 2 \cdot 10 \cdot 0,5 = 10\text{V}$ (2 μον.)

Οι δυνάμεις Laplace από το μαγνητικό πεδίο στα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού έχουν φορά προς το άκρο Α. Άρα το άκρο Α έχει αρνητικό πρόσημο και το άκρο Γ θετικό. (2 μον.)

γ) $I = \frac{\Sigma E}{R} = \frac{E - E_{επ}}{R} = \frac{1}{R}(E - Bu\ell) = \frac{1}{20}(12 - 10) = 0,1\text{A}$ (2 μον.)

δ) $I = \frac{1}{R}(E - Bu\ell) = 0 \Rightarrow u = \frac{E}{B\ell} = \frac{12}{2 \cdot 0,5} = 12 \frac{m}{s}$ (2 μον.)

ε) Στην οριακή ταχύτητα: $\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - F_L = 0 \Rightarrow mg = F_L$

$$mg = B \frac{1}{R}(Bu_{op}\ell - E)\ell \Rightarrow mgR = B\ell(Bu_{op}\ell - E) \Rightarrow mgR = B^2\ell^2u_{op} - B\ell E$$

$$\Rightarrow mgR + B\ell E = B^2\ell^2u_{op} \Rightarrow u_{op} = \frac{mgR + B\ell E}{B^2\ell^2} \Rightarrow u_{op} = \frac{10 + 12}{1} = 22 \text{ m/s}.$$
 (4 μον.)

στ) $I = \frac{E_{επ} - E}{R} = \frac{1}{R}(Bu_{op}\ell - E) = 0,5\text{A}$ (3 μον.)

ζ) Μηχανική ισχύς από την επίδραση του βάρους: $P_{\text{MHX}} = mgu_{op} = 0,05 \cdot 10 \cdot 22 = 11\text{W}$

Ηλεκτρική ισχύς στην αντίσταση: $P_{\eta\lambda} = I^2 R = 0,5^2 \cdot 20 = 5\text{W}$

Ισχύς στην πηγή: $P_{\text{πηγής}} = IE = 0,5 \cdot 12 = 6\text{W}$. Η μείωση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας αποδίδεται στην αντίσταση και στην πηγή. $P_{\text{μην.}} = P_{\eta\lambda.} + P_{\text{πηγής.}}$ (3 μον.)