

ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ



20^Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Αφιερωμένη στη μνήμη της Φυσικού Σύλβιας Γιασουμή

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (Επαναληπτικός Διαγωνισμός)

Κυριακή, 19 Μαρτίου, 2006

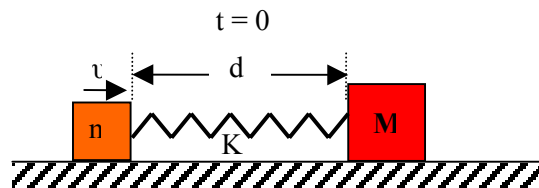
Ώρα: 10:30 - 13:30

Οδηγίες:

- 1) Το δοκίμιο αποτελείται από πέντε (5) θέματα.
- 2) Να απαντήσετε τα ερωτήματα όλων των θεμάτων.
- 3) Να εκφράζετε τις απαντήσεις σας, όπου χρειάζεται, με ακρίβεια τριών σημαντικών ψηφίων.
- 4) Όταν σε ένα θέμα δε δίνονται αριθμητικά δεδομένα, να εκφράζετε τις απαντήσεις σας ως συνάρτηση των μεγεθών που δίνονται στο αντίστοιχο θέμα ή ερώτημα.
- 5) Να χρησιμοποιείτε μόνο τις σταθερές που δίνονται σε κάθε ερώτημα.
- 6) Επιτρέπεται η χρήση μόνο μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
- 7) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΘΕΜΑ 1 (10 μονάδες)

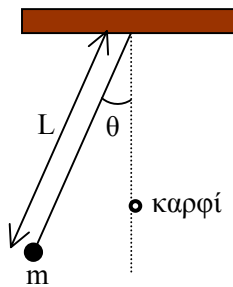
Δύο μάζες m και M συνδέονται με αβαρές ελατήριο σταθεράς K και φυσικού μήκους d (το μήκος όταν το ελατήριο δε δέχεται οποιαδήποτε δύναμη). Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια που δεν παρουσιάζει τριβές με τα σώματα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η μάζα m δέχεται ώθηση η οποία της προσδίδει ταχύτητα u με διεύθυνση οριζόντια και φορά προς την κατεύθυνση που βρίσκεται η μάζα M , όπως δείχνει το σχήμα.



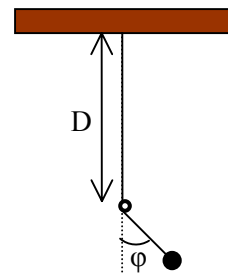
- (α) Ποια θα είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας;
- (β) Να βρείτε τη μικρότερη απόσταση μεταξύ των δύο μαζών κατά την κίνησή τους όπως και την αντίστοιχη χρονική στιγμή που συμβαίνει αυτό.

ΘΕΜΑ 2 (15 μονάδες)

Σφαιρίδιο μάζας m αιωρείται από μη ελαστικό νήμα μήκους L και αμελητέας μάζας. Το σφαιρίδιο αφήνεται από την ηρεμία όταν το νήμα σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο ($\theta \ll 1$), όπως δείχνει το σχήμα 1. Όταν το νήμα είναι κατακόρυφο συναντά μικρό καρφί (κάθετα στη σελίδα) σε απόσταση D από το πάνω άκρο του νήματος.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Θεωρείστε ότι δεν υπάρχουν απώλειες μηχανικής ενέργειας σε άλλες μορφές λόγω τριβών.

(α) Να βρείτε, σε σχέση με τα δεδομένα του προβλήματος, το μέγιστο ύψος, H , στο οποίο θα φτάσει η μάζα m στο σχήμα 2, σε σχέση με το χαμηλότερο σημείο που βρίσκεται το σώμα όταν το νήμα είναι κατακόρυφο.

(β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της γωνίας, φ , ($\varphi \ll 1$), στο σχήμα 2.

(γ) Να βρείτε την περίοδο T , της ταλάντωσης της μάζας m , από τη θέση στο σχήμα 1 μέχρι τη θέση στο σχήμα 2 και ξανά πίσω στη θέση 1.

(δ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση του ύψους h σε συνάρτηση με το χρόνο, $h = f(t)$, της μάζας m , σε σχέση με το χαμηλότερο σημείο που βρίσκεται όταν το νήμα είναι κατακόρυφο, για μια πλήρη περίοδο της κίνησης. Στη γραφική παράσταση να βρείτε τα σημεία τομής με τους δύο άξονες, συναρτήσει των δεδομένων του προβλήματος.

Αρχίστε τη γραφική παράσταση από τη θέση της μάζας στο σχήμα 1.

(ε) Έστω $e = \frac{L-D}{L}$. Για δεδομένη τιμή της γωνίας θ ($\ll 1$), προσδιορίστε

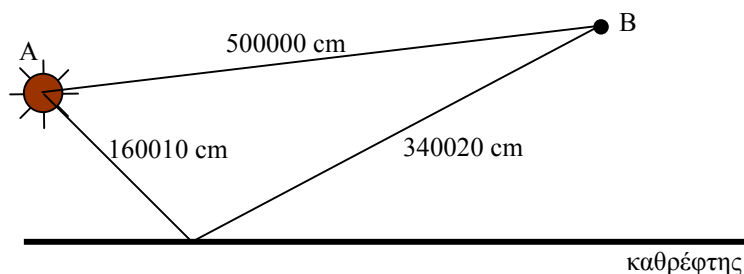
την ελάχιστη τιμή του e για την οποία θα έχουμε αρμονική ταλάντωση της μάζας m .

Θεωρήστε ότι για αρμονική ταλάντωση η γωνιακή μετατόπιση της μάζας m θα πρέπει να ικανοποιεί: $\theta \leq 0,1$ και $\varphi \leq 0,1$.

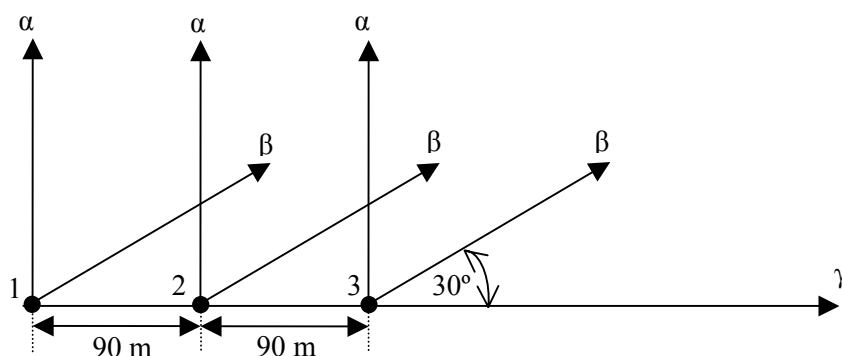
(Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσέγγιση, για $\theta \ll 1$, $\sin \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$).

ΘΕΜΑ 3 (20 μονάδες)

(Α) Μια πηγή τοποθετημένη στο σημείο Α, πάνω από την επιφάνεια ενός επίπεδου καθρέφτη, εκπέμπει ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Ένα κύμα από την πηγή προς στο σημείο Β μπορεί να ακολουθήσει δύο δρόμους, όπως δείχνει το σχήμα. Προσδιορίστε τα δύο μεγαλύτερα μήκη κύματος που αντιστοιχούν σε ελάχιστη ένταση στο σημείο Β. (Λόγω ανάκλασης στον καθρέφτη υπάρχει μεταβολή φάσης του κύματος κατά π).



(Β) Τρεις κεραίες, (1), (2) και (3), ραδιοφωνικών κυμάτων τοποθετούνται σε μια ευθεία οριζόντια γραμμή, 90 m η μια από την επόμενη, όπως στο σχήμα. Οι κεραίες εκπέμπουν σε μήκος κύματος $\lambda = 180$ m, σε φάση, με το ίδιο πλάτος A_0 και ένταση I_0 , ανεξάρτητα της απόστασης από τις κεραίες. Να βρείτε το πλάτος και την ένταση του συνιστάμενου κύματος από τις τρεις κεραίες σε σημείο πολύ μακριά από αυτές για τις κατευθύνσεις (α), (β) και (γ).

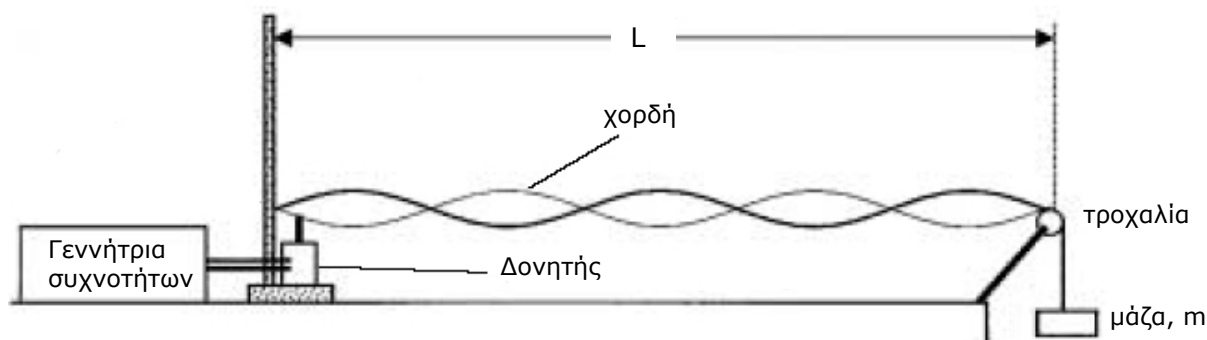


ΘΕΜΑ 4 (25 μονάδες)

Το σχήμα δείχνει πειραματική διάταξη για τη μελέτη στάσιμων κυμάτων σε τεντωμένη χορδή. Το μήκος της χορδής είναι $L = 1,25 \text{ m}$ και η γραμμική πυκνότητα $\mu = 5 \times 10^{-3} \text{ Kg/m}$.

Το στιγμιότυπο στο σχήμα εμφανίζεται όταν η συχνότητα της γεννήτριας είναι $f = 80 \text{ Hz}$.

Τόσο η τροχαλία όσο και το νήμα στο οποίο στηρίζεται η μάζα, είναι αβαρή.



(α) Υπολογίστε την ταχύτητα του κύματος που διαδίδεται κατά μήκος της χορδής.

(β) Υπολογίστε τη μάζα m . (Θεωρήστε $g = 10 \text{ m/s}^2$).

(γ) Μεταβάλλουμε τη συχνότητα ταλάντωσης f διατηρώντας τη μάζα m σταθερή, όπως βρέθηκε πιο πάνω.

(i) Εξηγήστε γιατί η χορδή δεν εκτελεί ταλαντώσεις για όλες τις τιμές της συχνότητας.

(ii) Υπολογίστε τη μικρότερη δυνατή συχνότητα ταλάντωσης της χορδής.

(δ) Μεταβάλλουμε τη μάζα m διατηρώντας τη συχνότητα σταθερή, 80 Hz . Υπολογίστε τη μέγιστη δυνατή μάζα ώστε η χορδή να εκτελεί ταλάντωση.

(ε) Με τη συχνότητα σταθερή στα 80 Hz βυθίζουμε τη μάζα m σε υγρό πυκνότητας ρ . Παρατηρείται ότι ο αριθμός των κοιλιών αυξάνεται από πέντε σε επτά.

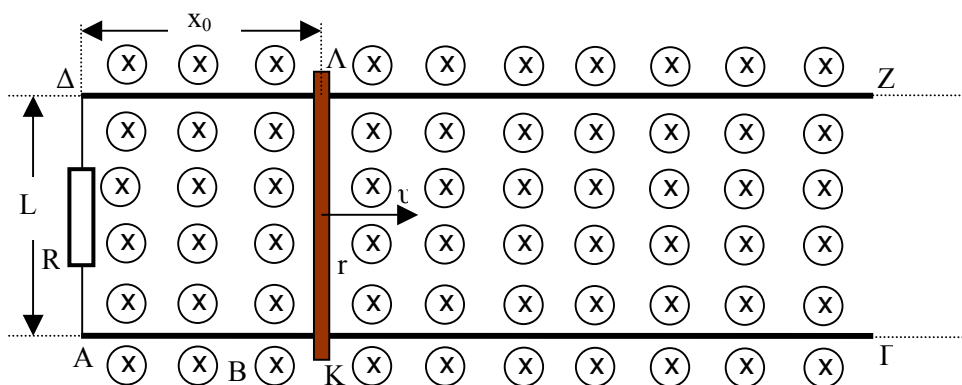
(i) Εξηγήστε την αύξηση του αριθμού των κοιλιών.

(ii) Υπολογίστε την πυκνότητα ρ του υγρού δεδομένου ότι ο όγκος της μάζας m μέσα στο υγρό είναι $1,6 \times 10^{-4} \text{ m}^3$.

ΘΕΜΑ 5 (30 μονάδες)

Ένας μεταλλικός αγωγός ΚΛ, μάζας m και ωμικής αντίστασης r , ολισθαίνει χωρίς τριβή με σταθερή ταχύτητα v , σε δύο παράλληλες μεταλλικές ράβδους ΑΓ και ΔΖ, αμελητέας ωμικής αντίστασης, που απέχουν μεταξύ τους απόσταση L . Ο αγωγός κατά την κίνησή του παραμένει συνεχώς παράλληλος με τον εαυτό του. Οι ράβδοι συνδέονται στα άκρα τους Α και Δ με μια ωμική αντίσταση R έτσι ώστε να σχηματίζεται κλειστό κύκλωμα, όπως δείχνει το σχήμα. Το σύστημα βρίσκεται συνεχώς σε κατακόρυφο μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής B .

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο αγωγός ΚΛ βρίσκεται σε απόσταση x_0 από τα άκρα Α και Δ των δύο ράβδων. Η μαγνητική επαγωγή B έχει τιμή που εξαρτάται από το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $B = B_0 - Ct$, όπου C μια θετική σταθερά, ($C > 0$).



Να βρείτε:

(α) τη χρονική σχέση που δίνει τη δύναμη F που πρέπει να ασκείται στον αγωγό ΚΛ για να διατηρεί σταθερή την ταχύτητά του.

(β) τη σχέση που πρέπει να ικανοποιεί η σταθερά C ώστε η τιμή του ηλεκτρικού ρεύματος τη χρονική στιγμή $t = 0$ να είναι μηδέν.

Για τα επόμενα ερωτήματα να χρησιμοποιήσετε τη σχέση: $C = \frac{B_0 v}{x_0}$.

Να βρείτε:

(γ) το φορτίο που διέρχεται από την αντίσταση R , από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t = \frac{x_0}{v}$.

(δ) τη μέγιστη τιμή της δύναμης F .

(ε) τη μέση τιμή της Η.Ε.Δ. από επαγωγή που δημιουργείται στα άκρα του αγωγού ΚΛ για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq \frac{x_0}{v}$.

(στ) την ηλεκτρική ενέργεια που καταναλώνεται στην αντίσταση R για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq \frac{x_0}{v}$.

ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ



**20^Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
ΦΥΣΙΚΗΣ**

Αφιερωμένη στη μνήμη της Φυσικού Σύλβιας Γιασουμή

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (Επαναληπτικός Διαγωνισμός)

Κυριακή, 19 Μαρτίου, 2006

Ώρα: 10:30 - 13:30

Προτεινόμενες Λύσεις

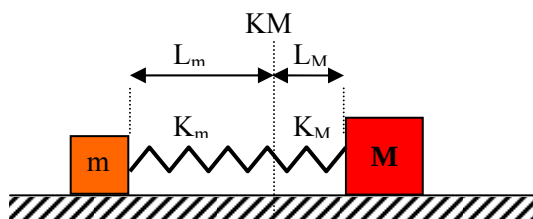
ΘΕΜΑ 1 (10 μονάδες)

(α) Η ταχύτητα, u , του κέντρου μάζας μπορεί να υπολογιστεί από την αρχική ορμή του συστήματος:

$$mv = (m + M)u \Rightarrow u = \frac{mv}{m + M} \cdot (2 \mu)$$

(β) Η κίνηση του συστήματος μπορεί να αναλυθεί στην κίνηση του κέντρου μάζας, ΚΜ, και των αρμονικών ταλαντώσεων των μαζών γύρω από το κέντρο μάζας.

Έστω L_m και L_M οι αποστάσεις μεταξύ του ΚΜ και των μαζών m και M , αντίστοιχα, όπως δείχνει το σχήμα.



Ο προσδιορισμός του ΚΜ μπορεί να γίνει με τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$L_m + L_M = d$$

$$mL_m = ML_M$$

Άρα,

$$L_m = \frac{Md}{m+M}$$

$$L_M = \frac{md}{m+M}$$

Στο σύστημα αναφοράς του ΚΜ οι δύο μάζες εκτελούν αρμονικές ταλαντώσεις. Σε αυτό το σύστημα αναφοράς το ΚΜ είναι ακίνητο, σαν να είναι το ελατήριο καρφωμένο στο ΚΜ. Οι σταθερές των δύο τμημάτων του ελατηρίου με μήκη L_m και L_M , είναι αντίστοιχα,

$$K_m = K \frac{d}{L_m}$$

$$K_M = K \frac{d}{L_M}$$

Το γεγονός ότι οι δύο μάζες εκτελούν ταλαντώσεις με την ίδια περίοδο (και συχνότητα) μπορεί να αποδειχθεί εύκολα με βάση τις προηγούμενες σχέσεις:

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_m}} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K_M}} = T_M = T$$

Με βάση τις προηγούμενες σχέσεις παίρνουμε για την περίοδο,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mM}{K(m+M)}}$$

Η μικρότερη απόσταση μεταξύ των δύο μαζών επιτυγχάνεται μετά από χρονικό διάστημα $\frac{1}{4}$ της περιόδου T από την αρχική στιγμή $t = 0$ (και μετά από κάθε μια περίοδο από τη στιγμή αυτή).

Άρα,

$$t_{\min} = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{mM}{K(m+M)}} \cdot \mathbf{(4 \mu)}$$

Εφόσον το ελατήριο έχει αρχικά το φυσικό του μήκος, οι αρχικές ταχύτητες των μαζών καθορίζουν τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσής τους.

Αν συμβολίσουμε με A_m και A_M τα αντίστοιχα πλάτη ταλάντωσης των μαζών m και M , γύρω από το ΚΜ, οι εξισώσεις κίνησης γράφονται ως,

$$x_m = L_m + A_m \eta \mu \omega t$$

$$x_M = L_M + A_M \eta \mu \omega t$$

Παραγωγίζοντας παίρνουμε,

$$v_m = A_m \omega \sigma \upsilon \nu \omega t = v_M \sigma \upsilon \nu \omega t$$

$$v_M = A_M \omega \sigma \nu \nu \omega t = V_M \sigma \nu \nu \omega t$$

όπου οι ταχύτητες V_m και V_M , ως προς το ΚΜ, είναι

$$V_m = v - u \quad (\text{τη χρονική στιγμή } t = 0 \text{ η μάζα } m \text{ κινείται})$$

$V_M = u$ (τη χρονική στιγμή $t = 0$ η μάζα M είναι ακίνητη σε σχέση με τη Γη).

Η ελάχιστη απόσταση, $D_{\min}$, μεταξύ των μαζών είναι:

$$D_{\min} = d - (A_m + A_M)$$

Με βάση τις πιο πάνω εξισώσεις, παίρνουμε

$$V_m + V_M = v \Rightarrow \omega(A_m + A_M) = v$$

ή

$$\frac{2\pi}{T}(A_m + A_M) = v \Rightarrow \sqrt{\frac{K(m+M)}{mM}}(A_m + A_M) = v \Rightarrow A_m + A_M = v \sqrt{\frac{mM}{K(m+M)}}$$

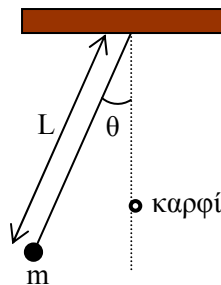
Τελικά,

$$D_{\min} = d - v \sqrt{\frac{mM}{K(m+M)}} \cdot \mathbf{(4 \mu)}$$

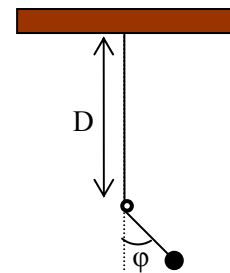
ΘΕΜΑ 2 (15 μονάδες)

(α) Λόγω διατήρησης της μηχανικής ενέργειας το ύψος της μάζας m στο σχήμα 1 θα πρέπει να είναι το ίδιο με το ύψος που φτάνει η μάζα στο σχήμα 2, σε σχέση με το κατώτατο σημείο που μπορεί να βρεθεί η μάζα. Άρα,

$$H = L(1 - \sigma \nu \nu \theta) \cdot \mathbf{(3 \mu)}$$



Σχήμα 1



Σχήμα 2

(β) Στο σχήμα 2 το ύψος H δίνεται από τη σχέση:

$$H = (L - D)(1 - \sigma \nu \nu \phi)$$

Άρα,

$$(L - D)(1 - \sigma \nu \nu \phi) = L(1 - \sigma \nu \nu \theta) \Rightarrow \sigma \nu \nu \phi = \frac{L \sigma \nu \nu \theta - D}{L - D}$$

$$\theta, \phi \ll 1 \Rightarrow \sigma \nu \nu \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}, \sigma \nu \nu \phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2}, \text{ οπότε παίρνουμε,}$$

$$1 - \frac{\phi^2}{2} = \frac{L(1 - \frac{\theta^2}{2}) - D}{L - D} \Rightarrow 2 - \phi^2 = \frac{L(2 - \theta^2) - 2D}{L - D}$$

Τελικά,

$$\phi = \theta \cdot \sqrt{\frac{L}{L - D}} \cdot \mathbf{(3 \mu)}$$

(γ) Η περίοδος T_1 εκκρεμούς μήκους L που εκτελεί αρμονική ταλάντωση είναι:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Και η περίοδος T_2 αντίστοιχου εκκρεμούς με μήκος $L - D$ είναι,

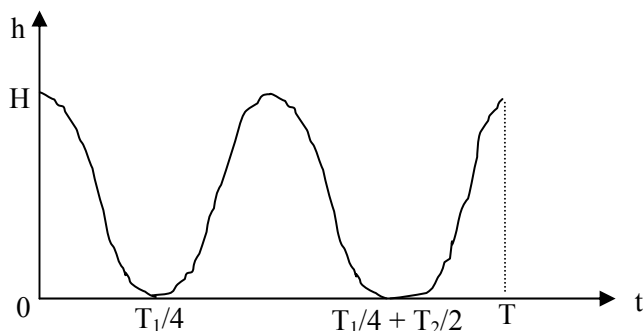
$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{L - D}{g}}$$

Η ζητούμενη περίοδος T είναι:

$$T = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} \cdot \text{Άρα,}$$

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{g}} (\sqrt{L} + \sqrt{L - D}) \cdot \mathbf{(3 \mu)}$$

(δ) **(3 μ)**



(ε) Από την απάντηση στο ερώτημα (β), έχουμε,

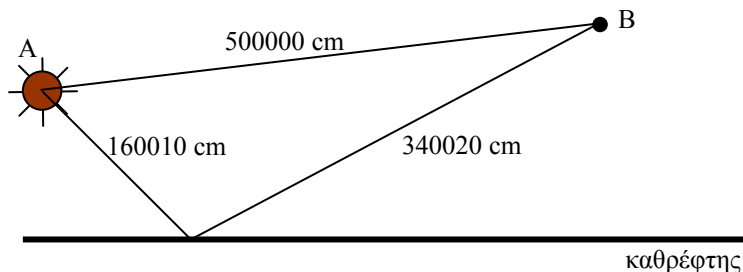
$$\phi = \theta \cdot \sqrt{\frac{L}{L - D}} = \theta \cdot \sqrt{\frac{1}{e}}, \theta \ll 1$$

Για να εξασφαλίσουμε ότι $\phi \ll 1$, χρειαζόμαστε $\theta \cdot \sqrt{\frac{1}{e}} \leq 0,1$ ή

$$e \geq e_{\min} \approx 100\theta^2 \cdot \mathbf{(3 \mu)}$$

Σημείωση: Ο αριθμητικώς συντελεστής σε αυτή την έκφραση είναι, ασφαλώς, μια προσέγγιση. Οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα $10^2 \sim 10^4$ θα είναι αποδεκτή.

ΘΕΜΑ 3 (20 μονάδες)



(Α) Η συνθήκη για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα να φτάνουν στο σημείο Β και να δίνουν απόσβεση, λαμβανομένου υπόψη της ανάκλασης στον καθρέφτη όπου υπάρχει μεταβολή φάσης του κύματος κατά π , είναι:

$$\Delta x = k\lambda \Rightarrow (160010 + 340020) \times 10^{-2} - 500000 \times 10^{-2} = (500030 - 500000) \times 10^{-2} = k\lambda$$

$$\Rightarrow 30 \times 10^{-2} = k\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{30 \times 10^{-2}}{k}$$

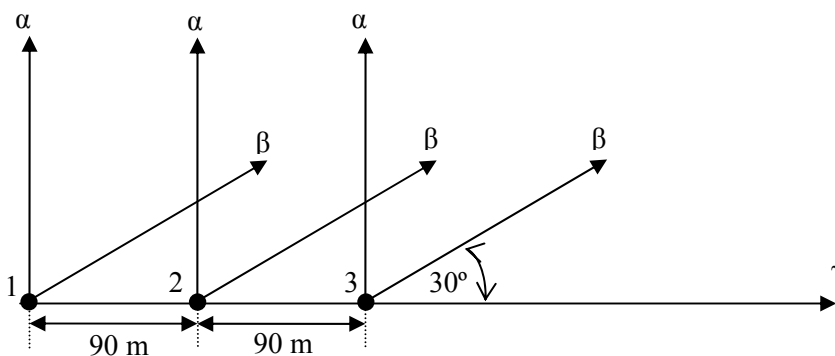
Για $k=1, 2$ παίρνουμε τις δύο μεγαλύτερες τιμές του μήκους κύματος λ :

$$\lambda_1 = \frac{30 \times 10^{-2}}{1} = 0,30m$$

$$\lambda_2 = \frac{30 \times 10^{-2}}{2} = 0,15m$$

(5 μ)

(Β)



Συμβολή στις κατευθύνσεις (α).

Τα κύματα διανύουν στις κατευθύνσεις (α) την ίδια απόσταση. Έτσι συμβάλουν σε φάση. Επομένως το πλάτος του συνισταμένου κύματος είναι $3A_0$ και η ένταση $9I_0$. (Η ένταση είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους).

(3 μ)

Συμβολή στις κατευθύνσεις (β).

Η διαφορά απόστασης στις κατευθύνσεις (β) είναι για τα κύματα που εκπέμπονται από τις κεραίες (1) και (2) ή (2) και (3) ίση με

$$\Delta x = 90 \sigma \nu \lambda 30^\circ = \frac{\lambda \sqrt{3}}{2} = \frac{\lambda \sqrt{3}}{4}$$

Για τα κύματα που εκπέμπονται από τις κεραίες (1) και (3), η διαφορά απόστασης είναι ίση με

$$\Delta x = 180 \sigma \nu \lambda 30^\circ = \frac{\lambda \sqrt{3}}{2}$$

Η αντίστοιχη διαφορά φάσης των κυμάτων που συμβάλουν είναι,

$$\Delta \phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x = \frac{\pi \sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta \phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x = \pi \sqrt{3}$$

Το πλάτος A_Σ του συνιστάμενου κύματος που προκύπτει από τη συμβολή δύο κυμάτων με πλάτος A_0 και που συμβάλουν με διαφορά φάσης $\Delta \phi$ είναι,

$$A_\Sigma = 2A_0 \left| \sigma \nu \nu \frac{\Delta \phi}{2} \right|$$

Η ένταση του συνιστάμενου κύματος είναι,

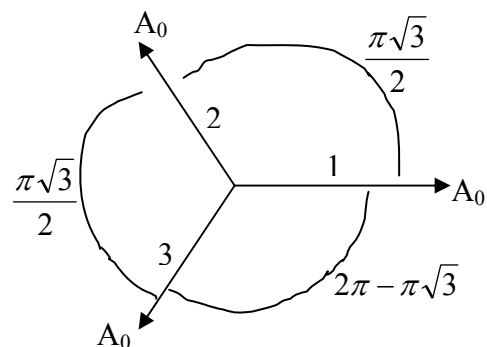
$$J_\Sigma = 4J_0 \sigma \nu \nu^2 \frac{\Delta \phi}{2}$$

Όπου J_0 είναι η ένταση του κύματος που εκπέμπεται από τις κεραίες.

Επομένως για τα κύματα που εκπέμπονται από τις κεραίες (1) και (3), το πλάτος του συνιστάμενου κύματος είναι,

$$A_\Sigma = 2A_0 \left| \sigma \nu \nu \frac{\pi \sqrt{3}}{2} \right| = 1,83A_0$$

Το συνιστάμενο κύμα από τις κεραίες (1) και (3) συμβάλει με διαφορά φάσης 180° με το κύμα από την κεραία (2). Αυτό προκύπτει από το διάγραμμα των διαφορών φάσης.



Άρα το πλάτος του συνιστάμενου κύματος από τις τρεις κεραίες είναι,

$$A_{\text{ολ}} = 1,83A_0 - A_0 = 0,83A_0$$

Επομένως η ένταση του συνιστάμενου κύματος από τις τρεις κεραίες είναι,

$$J_{\Sigma} = 0,689J_0$$

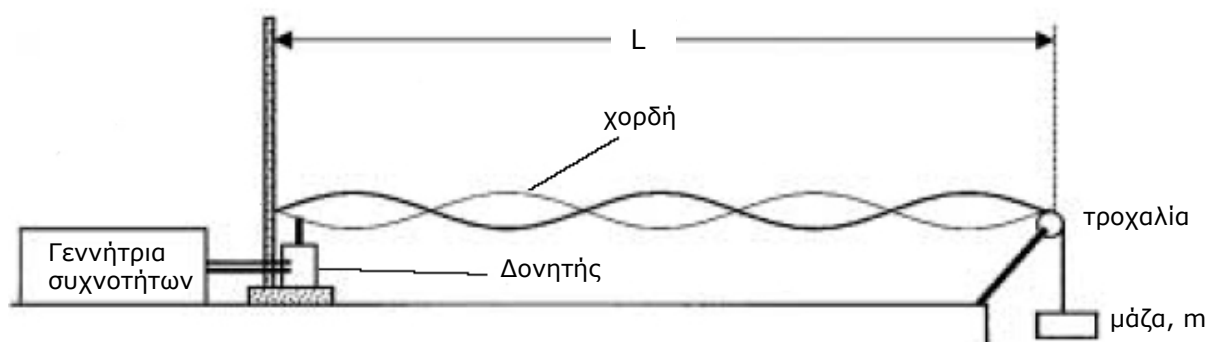
(8 μ)

Συμβολή στις κατευθύνσεις (γ).

Για τα κύματα στις κατευθύνσεις (γ) τα κύματα από τις κεραίες (1) και (2) ή (2) και (3) συμβάλουν με διαφορά απόστασης ίση με $\lambda/2$. Επομένως το πλάτος και η ένταση από τη συμβολή των κυμάτων που προέρχονται από τις κεραίες (1) και (2) ή (2) και (3) είναι μηδέν. Έτσι τα κύματα από τις τρεις κεραίες κατά τη συμβολή δίνουν συνολικά κύμα πλάτους A_0 και έντασης J_0 .

(4 μ)

ΘΕΜΑ 4 (25 μονάδες)



(α) Από το στιγμιότυπο προκύπτει ότι:

$$5\frac{\lambda}{2} = L \Rightarrow 5\frac{\lambda}{2} = 1,25 \Rightarrow \lambda = 0,5m$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος κατά μήκος της χορδής είναι:

$$v = \lambda f \text{ . Άρα}$$

$$v = 0,5 \times 80 \Rightarrow v = 40m/s$$

(3 μ)

(β) Η ταχύτητα διάδοσης σε μια χορδή δίνεται από τη σχέση,

$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, όπου F η δύναμη που κρατά τη χορδή τεντωμένη και μ η γραμμική πυκνότητα της χορδής. Επομένως,

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\mu}} \Rightarrow m = \frac{v^2 \mu}{g} \Rightarrow m = \frac{40^2 \times 5 \times 10^{-3}}{10} = \frac{8}{10} \Rightarrow m = 0,8 \text{ Kg}$$

(3 μ)

(γ) (i) Για να εκτελεί ταλαντώσεις η χορδή θα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση:

$$L = k \frac{\lambda}{2}, \text{ όπου } k = 1, 2, 3 \dots$$

$$\text{Αλλά, } v = \lambda f, \text{ και } v = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}, \text{ Επομένως,}$$

$$L = k \frac{v}{2f} \Rightarrow L = k \frac{\sqrt{\frac{mg}{\mu}}}{2f} \Rightarrow f = k \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{mg}{\mu}}$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι οι τιμές της συχνότητας f θα πρέπει να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο μιας σταθερής ποσότητας. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι μόνο για συγκεκριμένες τιμές της συχνότητας f , (κβαντισμένες), που ικανοποιείται η πιο πάνω σχέση θα έχουμε ταλάντωση της χορδής.

(4 μ)

(ii) Η μικρότερη δυνατή συχνότητα ταλάντωσης της χορδής είναι εκείνη για την οποία ικανοποιείται η πιο πάνω σχέση και η τιμή του k είναι η μικρότερη ακέραια τιμή, $k = 1$. Άρα,

$$f_{\min} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{mg}{\mu}} \Rightarrow f_{\min} = \frac{1}{2 \times 1,25} \sqrt{\frac{0,8 \times 10}{5 \times 10^{-3}}} \Rightarrow f_{\min} = 16 \text{ Hz}$$

(3 μ)

(δ) Από την πιο πάνω σχέση, παίρνουμε,

$$m = \frac{4\mu L^2 f^2}{k^2 g}. \text{ Επομένως η μέγιστη τιμή της μάζας } m \text{ για να εκτελεί}$$

ταλάντωση η χορδή είναι εκείνη για την οποία ικανοποιείται η σχέση αυτή και η τιμή του k είναι η μικρότερη ακέραια τιμή, $k = 1$. Άρα,

$$m = \frac{4\mu L^2 f^2}{k^2 g} \Rightarrow m_{\max} = \frac{4 \times 5 \times 10^{-3} \times 1,25^2 \times 80^2}{10} \Rightarrow m_{\max} = 20 \text{ Kg}$$

(3 μ)

(ε) (i) Ο αριθμός των κοιλιών που σχηματίζονται κατά την ταλάντωση της χορδής είναι ίσος με την τιμή του k . Έχουμε,

$$k = 2Lf \sqrt{\frac{\mu}{F}}.$$

Όταν η μάζα m βυθίζεται μέσα σε υγρό δέχεται, εκτός από το βάρος mg , την άνωση A , με κατεύθυνση αντίθετη του βάρους. Άρα, η δύναμη F που τώρα δέχεται η χορδή είναι $mg - A$, δηλαδή μικρότερη από τη δύναμη που δεχόταν πριν τη βύθιση της μάζας μέσα στο υγρό. Από την τελευταία σχέση φαίνεται ότι μείωση της δύναμης F συνεπάγεται αύξηση της τιμής του k . Επομένως αύξηση του αριθμού των κοιλιών που σχηματίζονται κατά την ταλάντωση της χορδής.

(4 μ)

(ii) Η Άνωση δίνεται από τη σχέση,

$A = \rho g V$, όπου ρ είναι η πυκνότητα του υγρού και V ο όγκος του βυθιζόμενου σώματος.
Από την πιο πάνω σχέση για το k , έχουμε,

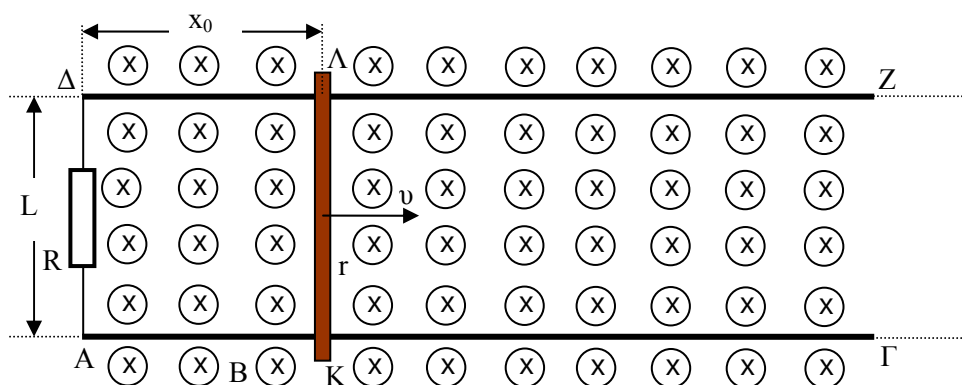
$$k = 2Lf \sqrt{\frac{\mu}{mg - \rho g V}} \Rightarrow k^2 (mg - \rho g V) = 4L^2 f^2 \mu \Rightarrow \rho = \frac{k^2 mg - 4L^2 f^2 \mu}{k^2 g V}$$

Αντικαθιστούμε,

$$\rho = \frac{7^2 \times 0,8 \times 10 - 4 \times 1,25^2 \times 80^2 \times 5 \times 10^{-3}}{7^2 \times 10 \times 1,6 \times 10^{-4}} \Rightarrow \rho = \frac{392 - 200}{0,0784} \Rightarrow \rho = 2449 \text{ Kg} / \text{m}^3.$$

(5 μ)

ΘΕΜΑ 5 (30 μονάδες)



(α) Η δύναμη F που πρέπει να εξασκείται στον αγωγό για να διατηρείται σταθερή η ταχύτητά του είναι ίσου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης με τη μαγνητική δύναμη Laplace:

$$F = -F_L = BIL, \text{ (θεωρούμε θετική φορά αυτή της ταχύτητας).}$$

Το ρεύμα I , που δημιουργείται από το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής, είναι

$$I = \frac{E}{R + r}$$

Όπου η τάση E βρίσκεται από το νόμο του Faraday,

$$E = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Άρα,

$$I = \frac{E}{R + r} = -\frac{\frac{d\Phi}{dt}}{R + r}$$

Η μαγνητική ροή Φ είναι,

$\Phi = BS$, όπου B είναι η μαγνητική επαγωγή και S το εμβαδόν του βρόχου ΑΚΛΔ.

Για κάθε στιγμή t , έχουμε,

$$B = B_0 - Ct \text{ και}$$

$$S = (x_0 + vt)L. \text{ Άρα}$$

$$\Phi = (B_0 - Ct)(x_0 + vt)L$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -CL(x_0 + vt) + (B_0 - Ct)vL \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = L(B_0v - Cx_0) - 2CvLt$$

Άρα,

$$I = -\frac{\frac{d\phi}{dt}}{R+r} = \frac{2CvLt - L(B_0v - Cx_0)}{R+r}$$

Έχουμε έτσι,

$$F = BIL = (B_0 - Ct) \frac{2CvLt - L(B_0v - Cx_0)}{R+r} L$$

(5 μ)

(β) Από τη συνθήκη, $I = 0$ όταν $t = 0$, προκύπτει εύκολα από τη σχέση για το ρεύμα, ότι

$$B_0v - Cx_0 = 0 \Rightarrow C = \frac{B_0v}{x_0}$$

(5 μ)

(γ) Αντικαθιστούμε τη σχέση για τη σταθερά C στη σχέση για το ρεύμα:

$$I = \frac{2CvLt - L(B_0v - Cx_0)}{R+r} = \frac{2\frac{B_0v}{x_0}vLt - L(B_0v - \frac{B_0v}{x_0}x_0)}{R+r} \Rightarrow$$

$$I = \frac{2\frac{B_0Lv^2}{x_0}t}{R+r} \Rightarrow I = \frac{2B_0Lv^2}{x_0(R+r)}t$$

Παρατηρούμε ότι το ρεύμα είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου.

Επειδή η γραφική παράσταση $I=f(t)$ είναι ευθεία που περνά από το σημείο $(0,0)$, το φορτίο q είναι ίσο με το εμβαδόν που περικλείεται από τις ευθείες: $I=f(t)$, $I=0$ και $t = x_0/v$.

$$q = \frac{\frac{x_0}{2} \frac{2B_0vL}{R+r}}{2} \Rightarrow q = \frac{B_0x_0L}{R+r}$$

(5 μ)

(δ) Η δύναμη F , από την απάντηση του ερωτήματος (α) και τη σχέση για τη σταθερά C , παίρνει τη μορφή:

$$F = (B_0 - \frac{B_0 v}{x_0} t) \frac{2 \frac{B_0 v}{x_0} v L t - L (B_0 v - \frac{B_0 v}{x_0} x_0)}{R + r} L = (B_0 - \frac{B_0 v}{x_0} t) \frac{2 B_0 v^2 L^2 t}{x_0 (R + r)} \Rightarrow$$

$$F = \frac{2 B_0^2 v^2 L^2 t (x_0 - vt)}{x_0^2 (R + r)}$$

Η καμπύλη $F=f(t)$ είναι παραβολή. Η τιμή της F μηδενίζεται όταν $t = 0$ και όταν $t = x_0/v$. Λόγω συμμετρίας της καμπύλης μεταξύ των δύο αυτών τιμών, υπάρχει μέγιστη τιμή της F στο μέσο των αντίστοιχων σημείων, δηλαδή μέγιστη τιμή της F όταν $t = x_0/2v$. Άρα,

$$F_{\max} = \frac{2 B_0^2 v^2 L^2 \frac{x_0}{2v} (x_0 - v \frac{x_0}{2v})}{x_0^2 (R + r)} \Rightarrow F_{\max} = \frac{B_0^2 L^2 v}{2(R + r)}$$

(5 μ)

(ε) Η Η.Ε.Δ. από επαγωγή E είναι,

$$E = \frac{2 B_0 L v^2}{x_0} t \text{ (η οποία προκύπτει από τη σχέση για το ρεύμα).}$$

Άρα η μέση τιμή της E για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq \frac{x_0}{v}$ είναι,

$$\bar{E} = B_0 L v$$

(5 μ)

(στ) Η ηλεκτρική ενέργεια Q που καταναλώνεται στην αντίσταση R για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq \frac{x_0}{v}$, είναι

$$Q = \frac{\bar{E}^2}{(R + r)^2} R t \Rightarrow Q = \frac{B_0^2 L^2 v^2}{(R + r)^2} R \frac{x_0}{v} \Rightarrow Q = \frac{B_0^2 L^2 v x_0}{(R + r)^2} R .$$

(5 μ)